රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි තෙවන ස්ථලය
(පලමු සමාසික පරීක්ෂණය)

ජුනි/ජූලි 2015

විෂය: ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: MAT312β/MPM3123 (තාත්වික විශ්ලේෂණය)

කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්ණ 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

1. a) සුපුරුදු අංකනයෙන් කෝෂී ස්වාර්ස් අසමානතාවය, $|\underline{\mathbf{x}}.\underline{\mathbf{y}}| \leq \|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\|$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}, \in \mathbb{R}^n$ වේ. කෝෂී ස්වාර්ස් අසමානතාවය භාවිතයෙන්

   (i) ත්‍රිකෝණ අසමානතාවය, $\|\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{y}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\|$,

   (ii) පයිතගරස් ප්‍රමෙයය, $\|\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{y}}\|^2 = \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2$, සහ

   (iii) x, y සහ z යනු $x+y+z \leq 3$ වන පරිදි වූ ධන නිඛිල තුනක් නම් එවිට $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3$

   බව සාධනය කරන්න.

   b) $\underline{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$, සහ $r > 0$ නම. පහත ඒවා අර්ථ දක්වන්න.

   (i) කේන්ද්‍රය $\underline{\mathbf{x}}_0$ සහ අරය r වන $\mathbb{R}^n$ හි විවෘත ගෝලය.

   (ii) කේන්ද්‍රය $\underline{\mathbf{x}}_0$ සහ අරය r වන $\mathbb{R}^n$ හි සංවෘත ගෝලය

   c) පහත එක් එක් කුලක විවෘතද නැතිද යන්න පැහැදිලි කරන්න.

   (i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 < 2\}$ (ii) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2+y^2 < 2\}$

   (iii) $C = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n)$ (iv) $D = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

   d) පහත කුලක සංවෘතද නැතිද යන්න පැහැදිලි කරන්න.

   (i) $E = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\underline{\mathbf{x}}\| \geq 2\}$ (ii) $F = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \ : \ 1 \leq \|\underline{\mathbf{x}}\| \leq 4\}$

---

2. a) පහත එක් එක් සීමාවන් පවතී නම් ඒවා සොයන්න එසේ නොමැති නම් සීමාව නොපවතින බව පෙන්වන්න.

   (i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{x^2+y^2}$ (iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2+x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

   (iv) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x}$ (v) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2}$

   b) $\underline{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$ ලක්ෂ්‍යයේදී $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතයේ සන්තතිකතාවය සඳහා (ϵ, δ) අර්ථ දැක්වීම ප්‍රකාශ කරන්න.

සම්බන්ධිතයි.

(i) සීමා සඳහා (ϵ, δ) අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන්

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ නම්} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ නම්} \end{cases}$$

මගින් අර්ථ දක්වා ඇති $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතයෙහිඅ මූල ලක්ෂ්‍යයේදී සීමාව 0 බව පෙන්වන්න. මූල ලක්ෂ්‍යයේදී f හි සන්තතිකතාව විස්තර කරන්න.

c) පහත ශ්‍රිතයේ සන්තතිකතාව සාකච්ඡා කරන්න.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ නම්} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ නම්.} \end{cases}$$

$f(x,y)$ ශ්‍රිතය $(0,0)$ හිදී අවකල්‍ය වේද? ඔබේ පිළිතුර පැහැදිලි කරන්න.

---

3. a) (i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$ ලක්ෂ්‍යයේදී $\underline{\mathbf{u}}$ දිශාවට f හි දිශ්‍ය ව්‍යුත්පන්නය අර්ථ දක්වන්න.

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ යනු අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $D_{\underline{\mathbf{u}}}f(\underline{\mathbf{a}}) = \nabla f(\underline{\mathbf{a}}).\underline{\mathbf{u}}$ බව පෙන්වන්න.

b) (i) $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ යැයිද $\underline{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{j}}$ යනු ඒකක දෛශිකයක්ද යැයි ගනිමු. දිශ්‍ය ව්‍යුත්පන්නයේ අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ අගයන්න.

(ii) $f(x,y,z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2$ යැයි ගනිමු a(ii) කොටසේ ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් $(1,-2,-1)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $2\underline{\mathbf{i}} - 2\underline{\mathbf{j}} - \underline{\mathbf{k}}$ දිශාවට f හි දිශ්‍ය ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

c) $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ ශ්‍රිතය සලකන්න.

(i) $(1,1)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $f(x,y)$ වේගයෙන්ම වැඩිවන් දිශාව සොයන්න.

(ii) $(1,1)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $f(x,y)$ හි දිශ්‍ය ව්‍යුත්පන්නය 0 වන දිශාව සොයන්න.

---

4. a) $u = x^2 + 2xy + y^2$, $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ යැයි ගනිමු.

(i) දාම නීතිය භාවිතය,

(ii) අවකලනයට පෙර u යන්න t ඇසුරින් ප්‍රකාශ කිරීම

යන ආකාර දෙකින්ම $\frac{du}{dt}$ සොයන්න.

b) A, B, C නම් කුහුඹින් තිදෙනෙක් පිළිවෙලින් x, y සහ z අක්ෂයන්හි ධන දිශාවන් ඔස්සේ සෙමින් ඇදී යයි. A සහ B කුහුඹුවන් 1cm/s ක සහ C කුහුඹුවා 3cm/s ක නියත වේගයන්ගෙන් සියලු දෙනා මූලයෙන් ඉවතට ඇදී යයි

(i) $A \equiv (x,0,0)$, $B \equiv (0,y,0)$ සහ $C \equiv (0,0,z)$ නම් එවිට ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ii) A මූලයේ සිට 2cm දුරකින්ද B සහ C මූලයේ සිට 1cm දුරකින්ද සිටිනා විට ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයේ වෙනස්වීමේ සීඝ්‍රතාවය සොයන්න

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ යනු (x_0, y_0) හිදී අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු.

සම්බන්ධිතයි.

(i) $f(x,y,z)=0$ පෘෂ්ඨයට (x_0,y_0,z_0) හිදී වන ස්පර්ශ තලයේ සමීකරණය
$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$ මගින්ද

(ii) (x_0,y_0,z_0) හිදී පෘෂ්ඨයට වන අභිලම්භයේ සමීකරණයේ සමමිතික ආකාරය

$$\frac{(x-x_0)}{f_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{f_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{f_z(x_0,y_0,z_0)}$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

d) $z=x^2-3y^2+xy$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන පෘෂ්ඨයට, පෘෂ්ඨය මත වූ $(1,1,-1)$ ලක්ෂ්‍යයේදී

(i) ස්පර්ශ තලයේ සහ

(ii) අභිලම්භයේ

සමීකරණ සොයන්න.

---

5. a) (i) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ යනු $f(x_1,x_2,...,x_n)=f(\underline{\mathbf{x}})=(f_1(\underline{\mathbf{x}}),f_2(\underline{\mathbf{x}})...,f_m(\underline{\mathbf{x}}))$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු. f හි $\underline{\mathbf{x}}$ ලක්ෂ්‍යයේදී ජැකෝබියානු න්‍යාසය ලියා දක්වන්න.

(ii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ශ්‍රිතය $f(x,y)=(\sin x\cos y,\sin x\ siny,\cos x\cos y)$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත. f හි (x,y) ලක්ෂ්‍යයේදී ජැකෝබියානු න්‍යාසය $Df(x,y)$ නිර්නය කරන්න.

b) f යනු සියලු $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ සඳහා අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් යැයි සිතමු. g_1, g_2 යනු $\mathbb{R}^3$ මත $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $g_2(x,y,z)=x+y+z$ සමීකරණ මගින් අර්ථ දක්වා ඇති ශ්‍රිත යැයි ගනිමු , g යනු $(g_1(x,y,z),g_2(x,y,z))$ මගින් දෙනු ලබන දෛශික අගීය ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු, h යනු $h=f\circ g$ සංයුක්ත ශ්‍රිතය යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්

$$\|\nabla h\|=4(D_1f)^2g_1+4(D_1f)(D_2f)g_2+3(D_2f)^2$$

බව පෙන්වන්න.

c) f යනු

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq 0 \text{ නම}\\ 0, & \text{නම}\end{cases}$$

ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු. $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ බව පෙන්වන්න.

d) $\sin xy+\sin yz+\sin xz=1$ හි z විචල්‍යය, x සහ y හි ශ්‍රිතයක් යැයි සිතමු. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ සහ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ සොයන්න.

---

6. a) පහත ශ්‍රිතයෙහි ආන්ත තිබේ නම් ඒවා සොයා වර්ගීකරණය කරන්න
$f(x,y)=6x-4y-x^2-2y^2$

b) ඉහල මතුපිට (පියන) රහිත සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙට්ටියක් දී ඇති අමුද්‍රව්‍ය ප්‍රමාණයකින් සෑදීමට අවශ්‍ය නම් එය සමචතුරස්‍රාකාර පතුලක් සහ උස පතුලේ පැත්තක දිගෙන් අඩක් වන සේ පවතින විට පරිමාව උපරිම වන බව සාධනය කරන්න.

c) (i) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\displaystyle\iint_D(x+2y)dxdy$ අගයන්න. මෙහි D යනු $y=2x^2$ සහ $y=1+x^2$ පරාවල මගින් සීමා වන පෙදෙස වේ.

අවසාන පිටුව.