රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි තෙවන ස්ථලය
(පලමු සමාසික පරීක්ෂණය)

2015 ජූනි/ජූලි

විෂය: ව්‍යාවහාරික ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: MMA3113/AMT313β(භෞතික විද්‍යා හා ඉංජිනේරු විද්‍යා සඳහා ගණිත ක්‍රම)

කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

1. a) $f(s)$ මගින් දැක්වෙන, $F(t)$ ශ්‍රිතයක ලප්ලාස් පරිනාමනය වන $\mathcal{L}\{F(t)\}$ අර්ථ දක්වන්න.

b) $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ නම් එවිට

(i) $\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a),\ s > a$ (ii) $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2 - a^2},\ s > |a|$

(iii) $\mathcal{L}\{tF(t)\} = -\dfrac{d}{ds}f(s)$ (iv) $\mathcal{L}\{\dfrac{F(t)}{t}\} = \displaystyle\int_s^\infty f(u)du$

බව පෙන්වන්න.

c) පහත දැක්වෙන ලප්ලාස් පරිණාමන සොයන්න:

(i) $\mathcal{L}\left\{(2e^{3t}\sin 4t\right\}$, (ii) $\mathcal{L}\left\{t\sinh 4t\right\}$,

(iii) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sinh t}{t}\right\}$, (iv) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}\right\}$,

(v) $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\right\}$.

---

2. a) $f(s)$ හි ප්‍රතිලෝම ලප්ලාස් පරිණාමනය වන $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ අර්ථ දක්වන්න.

b) සුපුරුදු අංකණයෙන් $\mathcal{L}^{-1}\left\{f'(s)\right\} = -tF(t)$ බව පෙන්වන්න.

c) පහත දැක්වෙන ප්‍රතිලෝම ලප්ලාස් පරිණාමන සොයන්න:

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2+9)}\right\}$ (ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{s^2(s+3)}\right\}$

(iii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \dfrac{1}{s^2}\right)\right\}$

d) ලප්ලාස් පරිණාමන සඳහා පිරිවෙලුම ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න. පහත දැක්වෙන ප්‍රතිලෝම ලප්ලාස් පරිණාමන සෙවීමට පිරිවෙලුම ප්‍රමේයය භාවිතා කරන්න.

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$ (ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$

සම්බන්ධිතයි.

3. (a) $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$ යයි ගන්න. සුපුරුදු අංකණයෙන්

(i) $\mathcal{L}\{Y'(t)\} = sy(s) - Y(0)$

(ii) $\mathcal{L}\{Y''(t)\} = s^2y(s) - sY(0) - Y'(0)$

බව පෙන්වන්න.

(b) ලප්ලාස් පරිනාමන ක්‍රමය භාවිතයෙන්, පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt} &= t \\ \frac{d^2X}{dt^2} - Y &= e^{-t} \end{aligned}\right\} ; \quad X(0) = 3,\ Y(0) = 0,\ X'(0) = -2.$$

---

4. a) සුපුරුදු අංකණයෙන්

(i) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right\} = su(x,s) - U(x,0)$

(ii) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right\} = s^2u(x,s) - sU(x,0) - U_t(x,0)$

(iii) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right\} = \dfrac{du(x,s)}{dx}$ සහ

(iv) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right\} = \dfrac{d^2u(x,s)}{dx^2}$

බව පෙන්වන්න

b) තාප විසරණතාව, $k = 1$ වන අමුද්‍රව්‍යකින් සාදා ඇති ලැල්ලක උෂ්නත්ව ව්‍යාප්තිය $u = x$ වන තෙක් $x = 0$ සහ $x = 1$ මුහුනත් වල උෂ්ණත්වය පිලිවෙලින් 0 සහ 1 හි තබ ඇත. කාලය $t = 0$ අනතුරුව මුහුනත් දෙකෙහිම උෂ්නත්වය 0 හි පිහිටුවයි. කාලය t වන විට උෂ්නත්ව ව්‍යාප්තිය නිශ්චය කරන්න.

[$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{s\sinh a\sqrt{s}}\right\} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{a}}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)$. බව ඔබට උපකල්පනය කල හැක.]

---

5. a) $m > 0, n > 0$ සඳහා බීටා ශ්‍රිතය

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

(i) ලප්ලාස් පරිනාමන ක්‍රම භාවිතයෙන් සුපුරුදු අංකනයෙන් $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ බව පෙන්වන්න.

සම්බන්ධිතයි.

(ii) $2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta = B(m,n)$ බව පෙන්වීමට ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතා කරන්න.

b) ඉහත (a) කොටස භාවිතයෙන් පහත ඒවා පෙන්වන්න

(i) $\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^2dx = \frac{\pi}{16}$ (ii) $\int_0^2 x^4\sqrt{4-x^2}dx = 2\pi$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^6\theta d\theta = \frac{3\pi}{512}$ (iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

c) $\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ බව පෙන්වීමට ලප්ලාස් පරිනාමන ක්‍රම භාවිතා කරන්න.

[සුපුරුදු අංකණයෙන් $\Gamma(p)\Gamma(p-1) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, $0 < p < 1$, බව ඔබට උපකල්පනය කල හැක.]

---

6. (a) $f(x)$ යනු කාලාවර්තය $2L$ වන ආවර්තික ශ්‍රිතයක් යයිද එහි ෆුරියර් ශ්‍රේණිය $-L < x < L$ සඳහා $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ මගින් දෙනු ලැබේ යයිද සිතමු; මෙහි $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$ සහ $n = 1, 2, 3, ...,$ සඳහා $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}dx$ සහ $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin\frac{n\pi x}{L}dx$ වේ.

f යන්න $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(f(x))^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ යන පාර්සවෙල්ගේ තත්සාම්‍යය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

(b) $f(x) = x(\pi - x)$, $0 \le x \le \pi$, ශ්‍රිතයෙහි ෆුරියර් සයින් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය $f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + ...\right)$ ආකාරයෙන් ලබා ගන්න.

එමගින්

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ සහ

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

බව අපෝහණය කරන්න.

අවසාන පිටුව.