රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යාවේදී උපාධි පලමු ස්ථලය
(පලමු සමාසික පරීක්ෂණය)

2016 ජූලි

විෂයය: ව්‍යාවහාරික ගණිතය/කර්මාන්ත ගණිතය

පාඨමාලා ඒකකය: AMT111β/IMT111β(පෞරාණික යාන්ත්‍රණය-I)

කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

1. a) x අක්ෂය ඔස්සේ චලනය වන අංශුවක කාලය t වන විට ත්වරණය a යන්න $a = (6t-4)ms^{-2}$ මගින් දෙනු ලැබේ. ආරම්භයේදී P අංශුව $x = 20m$ ලක්ෂයේදී $15ms^{-1}$ වෙගයකින් x අක්ෂයේ ඍණ දිශාවට චලනය වේ. t කාලයේදී P අංශුවේ ප්‍රවේගය සහ විස්ථාපනය සොයන්න. තවද P අංශුව නිශ්චලතාවයට පත් වන කාලය සහ එවිට එහි විස්ථාපනයද සොයන්න.

b) O හරහා යන ඍජු රේඛාවක් ඔස්සේ ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් චලනය වන අතර ඕනෑම මොහොතක OP දුර x වේ. $x > a$ වන විට අංශුව O වෙත $\dfrac{mk}{x^2}$ බලයකින් ආකර්ෂණය වන අතර $x < a$ වන විට අංශුව O වෙතින් $\dfrac{mka}{x^3}$ බලයකින් විකර්ෂණය වේ; මෙහි k යනු නියතයකි. අංශුව O සිට $2a$ දුරකදී නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හැරියේ නම් එය $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ විට ක්ෂණිකව නිශ්චලතාවයට පත් වන බව පෙන්වන්න.

---

2. a) සුපුරුදු අංකනයෙන්, චලනය වන අංශුවක ප්‍රවේග සහ ත්වරණ සංරචකයන් තල ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක ඇසුරින්

(i) $\underline{\mathbf{v}} = \dot{r}\underline{\hat{\mathbf{r}}} + r\dot{\theta}\underline{\hat{\theta}}$

(ii) $\underline{\mathbf{a}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{\hat{\mathbf{r}}} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\underline{\hat{\theta}}$.

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

b) සුමට තිරස් මේසයක් මත චලනය වන ස්කන්ධය m වන A අංශුවක් අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇති අතර එය මේසය මත වූ සුමට O සිදුරක් හරහා වැටී ඇති අතර එයට ස්කන්දය m වන B අංශුවක් සම්බන්ධ කර අති අතර එය O හරහා යන සිරස් රේඛාව ඔස්සේ චලනය වේ. ආරම්භයේදී B නිසලවන අතර A අංශුවට O සිට a දුරකදී OA ට ලම්භකව $\sqrt{\dfrac{ga}{3}}$ වෙගයකින් චලනය වේ. අනුයාත චලිතයේදී $r = OA$ දුර a සහ $\dfrac{a}{2}$ අතර පවතින බව පෙන්වන්න. තවද අංශුවේ ආතතිය

$$\frac{1}{6}mg\left(3 + \frac{a^3}{r^3}\right)$$ බවද පෙන්වන්න

සම්බන්ධිතයි.

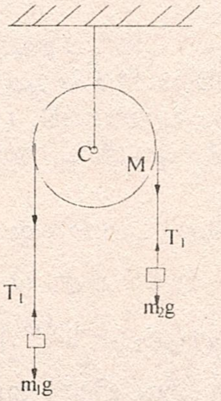
3. a) අංශු පද්ධතියක් සඳහා, මූලය අනුබද්ධයෙන් මුළු කෝණික ගම්‍යතාවය $\underline{\mathbf{H}}_0$ අර්ථ දක්වා සුපුරුදු අංකනයෙන්

(i) $\dfrac{d\underline{\mathbf{H}}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\mathbf{r}}_i \wedge \underline{\mathbf{F}}_i$ සහ

(ii) $\underline{\mathbf{H}}_0 = \underline{\mathbf{r}}_G \wedge M\underline{\mathbf{V}}_G + \underline{\mathbf{H}}_G$.

බව පෙන්වන්න.

b) m_1 සහ m_2 ස්කන්ධයන් දෙකක් අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට සම්බන්ද කර ඇති අතර තන්තුව, ස්කන්ධය M සහ විභ්‍රමන අරය K වන ඝර්ෂණය රහිත කප්පියක් මතින් දමා ඇති අතර කප්පියට එහි කෙන්ද්‍රය හරහා ඇති තිරස් අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණය විය හැක (පහත රූපය බලන්න).



(i) m_1 සහ m_2 වල ත්වරන සහ

(ii) තන්තු වල ආතතීන් T_1 සහ T_2

සොයන්න.

---

4. a) දෘඪ වස්තුවක් එක් ලක්‍ෂ්‍යයක් අචලව තබා ගනිමින් චලනය වේ යැයි සිතමු. අචල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ක්ෂණික අක්‍ෂ්‍යය වටා දෘඪ වස්තුවේ කෝණික ගම්‍යතාවය සුපුරුදු අංකනයෙන් $\underline{\mathbf{H}} = (H_1, H_2, H_3) = \sum m_i(\underline{\mathbf{r}}_i \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{\mathbf{r}}_i))$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$$H_1 = I_{xx}\omega_1 + I_{xy}\omega_2 + I_{xz}\omega_3,$$
$$H_2 = I_{xy}\omega_1 + I_{yy}\omega_2 + I_{yz}\omega_3,$$
$$H_3 = I_{xz}\omega_1 + I_{yz}\omega_2 + I_{zz}\omega_3,$$

බව පෙන්වන්න.

ප්‍රධාන අවස්ථිති ඝූර්ණ I යන්න

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වීමට ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතා කරන්න.

සම්බන්ධිතයි.

(ඇ) පැති වල දිග $2a$, $2a$, a වන සෘජුකෝණාස්‍රාකාර සමාන්තරානිකයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G වේ. එහි G හරහා යන පැතිවලට සමාන්තර වන සෘජුකෝනාස්‍ර අක්ෂ පද්ධතියක් අනුබද්ධයෙන්

(i) අවස්තිපී සූර්ණ සහ

(ii) අවස්තිපී ගුණිත

සොයන්න.

තවද සමාන්තරානිකයේ ප්‍රධාන අවස්පීති සූර්ණ සහ ප්‍රධාන අක්ෂ වල දිශා සොයන්න.

---

5. a) සුපුරුදු අංකනයෙන් එක් ලක්ෂයක් අචලව තබා ගනිමින් චලනය වන දෘඩ වස්තුවක චලිතය සඳහා ඔයිලර්ගේ සමීකරණ ලබා ගන්න.

b) දෘඩ වස්තුවක් එහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, G, වටා බාහිර බල රහිතව භ්‍රමණය වීමට නිදහස්ය. G අනුබද්ධයෙන් ප්‍රධාන අවස්තිපී සූර්ණ පිළිවෙලින් ඒකක $6I$, $3I$ සහ I වේ. ආරම්භයේදී වස්තුවට $\underline{\omega}_0 = (k, 0, 3k)$ කෝණික ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබේ. මෙහි k සහ I නියත වේ. t කාලයකට පසු කෝණික ප්‍රවේගය $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ යන්න

$$\begin{aligned} 5\omega_1^2 + \omega_2^2 &= 5k^2 \\ 9\omega_2^2 + 5\omega_3^2 &= 45k^2 \\ \omega_2 &= -\sqrt{5}\tanh(\sqrt{5}kt) \end{aligned} \qquad (1)$$

සමීකරණ තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න. තවද . ω_1 සහ ω_3 සොයන්න.

---

6. a) සුපුරුදු අංකනයෙන් ගතිමය පද්ධතියක් සඳහා ලග්රාන්ජ් සමීකරණ

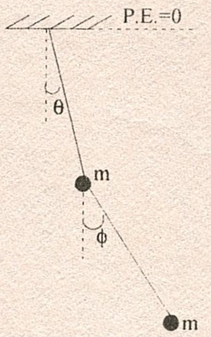
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

මගින් දෙනු ලැබේ. පරිකල්‍ය සංස්ථිතික ගතිමය පද්ධතියක් සඳහා ලග්රාන්ජ් සමීකරණ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; \qquad j = 1, 2, ..., n$$

ආකාරයෙන් අපෝහණය කරන්න,

b) ද්විත්ව අවලම්භයක් සමාන l දිගකින් සහ සමාන ස්කන්ධය m වන අවලම්බ දෙකකින් සමන්විත වන්නේ අචලව විවර්ත කර ඇති එක් අවලම්බයක බට්ටාගේ අනෙක් අවලම්බයෙ තන්තුවේ කෙල්වර සම්බන්ද කර ඇති පරිදිය (පහත රූපය බලන්න).



සම්බන්ධිතයි.

පද්ධතියේ චාලක ශක්තිය T සහ විභව ශක්තිය V යන්න පිළිවෙලින්

(i) $T = \frac{1}{2}ml^2\left(2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\phi - \theta)\right)$ සහ

(ii) $V = -mgl(2\cos\theta + \cos\phi)$.

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. පද්ධතියේ කුඩා දෝලන සඳහා චලිත සමීකරණ ලග්‍රාන්ජ් සමීකරණ භාවිතයෙන් නිර්ණය කරන්න.

අවසාන පිටුව.