රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය - විද්‍යා පීඨය

විද්‍යාවේදී සාමාන්‍ය උපාධි - පළමු ස්ථල
(පළමු සමාසික) පරීක්ෂණය - ජූලි 2016

විෂයය: ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: MAT111β / MAM1113 (දෛශික විශ්ලේෂණය)
කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න හතර (04) කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

1. P යනු තලයක් මත පිහිටි O මූලය අනුබද්ධයෙන් පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{r}$ වූ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. මෙම තලය මත පිහිටි O මූලය අනුබද්ධයෙන් පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{a}$ වූ A ලක්ෂ්‍යයක් සලකමු. $\underline{n}$ යනු තලයට අභිලම්බ දෛශිකයක් යැයි සිතමු.

තලයෙහි දෛශික සමීකරණය $\underline{r}\cdot\underline{a} = \underline{a}\cdot\underline{n}$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

දැන් BP තලයට ලම්බක වන පරිදි O මූලය අනුබද්ධයෙන් පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{b}$ වූ B ලක්ෂ්‍යයක් සලකමු. $\underline{r}\cdot\underline{a} = \underline{a}\cdot\underline{n}$ තලයට B සිට කෙටිම දුර, එනම් BP

$$\frac{|d-\underline{b}\cdot\underline{n}|}{|\underline{n}|},$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි $\underline{r}\cdot\underline{a} = \underline{a}\cdot\underline{n} = d$ වේ.

O මූලයක් අනුබද්ධයෙන් A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{i}+2\underline{j}-3\underline{k}, \underline{i}+5\underline{j}$ සහ $5\underline{i}+6\underline{j}-\underline{k}$ වේ.

(අ) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ට ලම්බක බව පෙන්වා ABC ත්‍රිකෝණයෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(ආ) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ දෛශික ගුණිතය සොයන්න. එනයින් ABC තලයෙහි සමීකරණය $\underline{r}\cdot\underline{n} = p$ ආකාරයෙන් සොයන්න. මෙහි p යනු නියතයක් වේ.

(ඇ) O මූලය අනුබද්ධයෙන් D ලක්ෂ්‍යයෙහි පිහිටුම් දෛශිකය $4\underline{i}-\underline{j}+3\underline{k}$ වේ. D සිට ABC තලයට ඇති කෙටිම දුර සොයන්න. එනයින් $ABCD$ චතුස්තලයෙහි පරිමාව ඒකක 21 බව පෙන්වන්න.

(ඇ) D ලක්ෂ්‍යය අඩංගු සහ Π තලය මත වූ සෑම E ලක්ෂ්‍යයක් සඳහාම $ABCE$ චතුස්තලයෙහි පරිමාව ඒකක 21 ම වන ගුණය සහිත Π තලයෙහි සමීකරණය කාටීසියානු ආකාරයෙන් ලබා ගන්න.

---

2. සුපුරුදු අංකනයෙන්,

(i) $f(x,y,z)$ අදිශ ක්ෂෙත්‍රයක අනුක්‍ර f

(ii) $\underline{F}(x,y,z) = F_1\,\underline{i} + F_2\,\underline{j} + F_3\,\underline{k}$ දෛශික ක්ෂෙත්‍රයක අපසා $\underline{F}$ සහ බඹුර $\underline{F}$

(අ) $x^2+y^2+z^2 = 14$ ගෝලය මත $\underline{A} = xy^2\,\underline{i} + zy^2\,\underline{j} + xz^2\,\underline{k}$ දෛශික ක්ෂේත්‍රය සලකන්න.

(i) (2,0,3) ලක්ෂ්‍යයේදී $\underline{A}^2$ හි දිශ්‍ය ව්‍යුත්පන්නය

(ii) (3,2,1) ලක්ෂ්‍යයේදී ගෝලයෙන් පිටත දිශාවට වූ ඒකක අභිලම්බ දෛශිකය

(iii) (ii) හි දිශාවට වූ (i) හි දිශ්‍ය ව්‍යුත්පන්නයේ සංරචකය

සම්බන්ධිතයි.

(ආ) $\underline{F}(x, y, z)$ දෛශික ක්ෂේත්‍රයක් නිර්භ්‍රමණ වේ නම් එවිට $\underline{F} = \text{grad} f$ වන පරිදි $f(x, y, z)$ අදිශ ක්ෂේත්‍රයක් පවතී.

$\underline{F} = 2xye^z\,\underline{i} + x^2e^z\,\underline{j} + x^2ye^z\,\underline{k}$ දෛශික ක්ෂේත්‍රය සලකන්න.

(i) $\underline{F}$ නිර්භ්‍රමණ බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x, y, z)$ අදිශ ක්ෂේත්‍රය $f(x, y, z) = x^2ye^z + C$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි C යනු නියතයක් වේ.

---

3. පහත දැක්වෙන ප්‍රතිඵල සත්‍යාපනය කරන්න. මෙහි $\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$, $r = |\underline{r}|$ සහ $f(r)$ යනු අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් වේ. තවද, සියළුම අංකන වලට සුපුරුදු තේරුම් ඇත.

(i) $\underline{\nabla}^2(\ln r) = \dfrac{1}{r^2}$

(ii) අපසා $\left[\dfrac{f(r)}{r}\,\underline{r}\right] = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left[r^2 f(r)\right]$

(iii) බඹුර $[f(r)\,\underline{r}] = \underline{0}$

---

4. (අ) සරල සංවෘත C වක්‍රයක් පිරිවසා $\underline{F}$ දෛශික ක්ෂේත්‍රයක රේඛා අනුකලය යන්නෙන් ඔබ අදහස් කරන්නේ කුමක්දැයි පැහැදිලි කරන්න.

$\underline{F} = 2x^2y\,\underline{i} + 3xy\,\underline{j}$ බලයක් xy-තලයෙහි $(0,0)$ සිට $(1,4)$ දක්වා $y = 4x^2$ වක්‍රය ඔස්සේ අංශුවක් විස්ථාපනය කරයි. බලය මගින් කෙරුණු කාර්යය සොයන්න.

(ආ) තලයක් සඳහා ග්‍රීන් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$$\int_C (x - y)\,dx + 3xy\,dy$$

සඳහා ග්‍රීන් ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කරන්න. මෙහි C යනු $x^2 = 4y$ සහ $y^2 = 4x$ මගින් අන්තර්ගත පෙදෙසෙහි මායිම වේ.

---

5. ගවුස් අපසාරිතා ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

D යනු $x^2 + y^2 = 16$. $z = 0$ සහ $z = 4$ සංවෘත සිලින්ඩරයෙන් පර්යන්තගත පෙදෙස සහ $\underline{F} = 3x^2\,\underline{i} + 6y^2\,\underline{j} + z\,\underline{k}$ නම්, අපසාරිතා ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කරන්න.

---

6. ස්ටෝක්ස් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

xy-තලයට ඉහළින් $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ අර්ධ ගෝලයේ පෘෂ්ඨය පිරිවසා $\underline{F} = (x^2 + y - 4)\,\underline{i} + 3xy\,\underline{j} + (2xz + z^2)\,\underline{k}$ දෛශික ක්ෂේත්‍රය සඳහා ස්ටෝක්ස් ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කරන්න. මෙහි C යනු එහි මායිම වේ.