University of Ruhuna
Bachelor of Science General Degree
Level I (Semester I) Examination – July 2016

Subject: Mathematics
Course Unit: MAT113 δ / MMS 111 α (Introductory Statistics) **Time: One (01) hour**

Answer <u>02 Questions</u> only.

1.

(a) The measured radius of a circle, R, has probability density function

$$f(r) = \begin{cases} 6r(1-r); & 0 < r < 1 \\ 0 \quad ; & \textit{otherwise} \end{cases}$$

(i) Find the expected value of the radius.
(ii) Hence, find the expected value of circumference.
(iii) Find the expected value of area.

(b) The time to failure in hours of an important piece of electronic equipment used in a manufactured DVD player has the probability density function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000}\exp\left(-x/2000\right); & x \geq 0 \\ 0 \quad ; & x < 0 \end{cases}$$

(i) Find $F(x)$.
(ii) Determine the probability that the electronic equipment lasts more than 1000 hours.
(iii) Determine the probability that the electronic equipment fails before 2000 hours.

2.

(a) A soft-drink machine is regulated so that it discharges an average of 200 milliliters per cup. If the amount of drink is normally distributed with a standard deviation equal to 15 milliliters,

(i) Find the fraction of the cups will contain more than 224 milliliters?
(ii) Find the probability that a cup contains between 191 and 209 milliliters?
(iii) How many cups will probably overflow if 230 milliliter cups are used for the next 1000 cups?
(iv) Below what value do we get the smallest 30% of the cups?

(b) Let Y denote a geometric random variable with probability function

$$p(y) = q^{y-1}p, \quad y = 1,2,3,\ldots, \qquad 0 \le p \le 1, \quad q = 1-p.$$

Show that

(i) for a positive integer a,

$$P(Y > a) = q^a.$$

(ii) for positive integers a and b,

$$P(Y > a+b \mid Y > a) = q^b = P(Y > b).$$

3.

(a) Let Y be a binomial random variable with the probability function

$$P(Y = y) = {}^{n}C_{y}\, p^{y}(1-p)^{n-y}, \quad y = 0,1,\ldots,n.$$

(i) Find $m_Y(t)$, the moment generating function of Y.

(ii) Hence show that $E[Y] = np$ and $E[Y^2] = n^2p^2 - np^2 + np$.

(iii) Hence find the variance of Y.

(b) The probability that a patient recovers from a delicate heart operation is 0.9. The next 100 patients having this operation, find the probability that

(i) between 84 and 95 (inclusive the values) survive?

(ii) fewer than 86 survive?

* * * * * * *

රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

විද්‍යාවේදී සාමාන්‍ය උපාධි ප්‍රථම ස්ථර (පළමු සමාසික) පරීක්ෂණය

ජූලි 2016

විෂය: ගණිතය

පාඨමාලා ඒකකය: MAT113 δ / MMS 111 α (සංඛ්‍යානයේ හැඳින්වීම) **කාලය පැය (1) එකයි**

ප්‍රශ්න <u>02 කට පමණක්</u> පිළිතුරු සපයන්න

1.

(අ) වෘත්තයක මනින ලද අරය, R, හි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිත

$$f(r)=\begin{cases}6r(1-r) & ; \quad 0<r<1\\ 0 & ; \quad \text{නැතහොත්}\end{cases}$$

මගින් දී ඇත.

(i) අරයෙහි අපේක්ෂිත අගය සොයන්න.
(ii) එනයින් පරිධියෙහි අපේක්ෂිත අගය සොයන්න.
(iii) වර්ගඵලයෙහි අපේක්ෂිත අගය සොයන්න.

(ආ) නිෂ්පාදිත DVD යන්ත්‍රයක අත්‍යාවශ්‍ය ඉලෙක්ට්‍රොනික උපකරණයක එක්තරා කොටසක් ක්‍රියාවිරහිත වීම සඳහා ගතවන කාලය පැය වලින් දැක්වෙන අතර එම කාලයෙහි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}\exp\left(-x/2000\right) & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

මගින් දී ඇත.

(i) $F(x)$ සොයන්න.
(ii) ඉලෙක්ට්‍රොනික උපකරණය පැය 1000 කට වඩා කාලයක් නොනැසී පැවතීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(iii) ඉලෙක්ට්‍රොනික උපකරණය පැය 2000 කට පෙර අක්‍රියවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

2.

(අ) සිසිල් බීම ලබා දෙන මැෂිමකින් සාමාන්‍යයෙන් කෝප්පයකට මිලි ලීටර් 200 ක් වත්කරයි. බීම ප්‍රමාණය සම්මත අපගමනය මිලි ලීටර් 15 ක් වන සේ ප්‍රමථ ලෙස ව්‍යාප්ත වේ නම්,

(i) කෝප්ප ප්‍රමාණයෙන් කොපමණ භාගයක් මිලි ලීටර් 224 වඩා වැඩිව තිබිය හැකිද යි සොයන්න.
(ii) කෝප්පයක මිලි ලීටර් 191 ත් 209 ත් අතර ප්‍රමාණයක් තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(iii) මිලි ලීටර් 230 ක කොප්ප භාවිතා කලහොත් ඊලඟ කෝප්ප 1000 න් කොපමණ ප්‍රමාණයක් උතුරා යයි ද?
(iv) කුඩාම බීම ප්‍රමාණයක් සහිත කෝප්ප 30% ක් ලබා දෙන්නේ කුමන අගයකට වඩා අඩු විට ද?

(ආ) Y යනු සම්භාවිතා ශ්‍රිතය,

$$p(y) = q^{y-1} p, \quad y = 1,2,3,\ldots, \qquad 0 \le p \le 1, \quad q = 1 - p.$$

වන ගුණෝත්තර සසම්භාවී විචල්‍යයකි.

(i) ධන නිඛිල a සඳහා,

$$P(Y > a) = q^a \ ,$$

(ii) ධන නිඛිල a සහ b සඳහා,

$$P(Y > a + b \mid Y > a) = q^b = P(Y > b),$$

බව පෙන්වන්න.

3.

(අ) Y යනු සම්භාවිතා ශ්‍රිතය

$$P(Y = y) = {}^nC_y \, p^y (1-p)^{n-y}, \quad y = 0,1,\ldots,n$$

වන ද්විපද සසම්භාවී විචල්‍යයකි.

(i) Y හි ඝූර්ණ ජනන ශ්‍රිතය $m_Y(t)$ සොයන්න.

(ii) එනයින් $E[Y] = np$ සහ $E[Y^2] = n^2p^2 - np^2 + np$ බව පෙන්වන්න.

(iii) එනයින් Y හි විචලතාව සොයන්න.

(ආ) සියුම් හදවත් සැත්කමකින් රෝගියකු සුව වීමේ සම්භාවිතාව 0.9 කි. එම සැත්කම කරන ඊලඟ රෝගීන් 1000 න්

(i) 84 සහ 95 අතර (එම අගයන් ද ඇතුලත් ව) ජීවත් වීමේ

(ii) 86 කට වඩා අඩු ප්‍රමාණයක් ජීවත් වීමේ

සම්භාවිතාව සොයන්න.

* * * * * * *