University of Ruhuna

Bachelor of Science General Degree
(Level II) Semester I Examination - July 2016

Subject : Applied Mathematics
Course unit: AMT212β/ MAM2123 (Computational Mathematics)

Time :Two (02) Hours

Answer 04 Questions only.
Allowed to use calculators only supplied by the University.

---

1. a) Explain the following terms.
   (i) Absolute error.
   (ii) Truncation error.

   b) Let x_a and y_a be approximate values of two numbers whose true values are x_t and y_t and, the corresponding absolute errors are e_x and e_y respectively.
   Show that $|(x_t + y_t) - (x_a + y_a)| \leq e_x + e_y$.

   c) Obtain the second degree Taylor polynomial approximation for $f(x) = (1+x)^{1/2}$ about $x = 0$; where $x \in [0, 0.1]$.
   (i) Write down the truncation error.
   (ii) Find the error bound of the truncation error for $x \in [0, 0.1]$.

   d) Convert
   (i) 1101001_2 to decimal
   (ii) 0.625_{10} to binary

   e) Explain the form of a floating point number in the finite number system.
   Using IEEE single precision format show that
   (i) $-20.5_{10} = \text{C1A40000}_{16}$
   (ii) $\text{BF880000}_{16} = -1.0625_{10}$

---

2. a) Write down the algorithm for bisection method for finding an approximate root of the equation $f(x) = 0$ of a continuous function f, in the interval $[a, b]$, where $f(a)$ and $f(b)$ are of opposite signs.

Suppose that the bisection method is used to find an approximate root of the equation $x^3 - 5x + 1 = 0$.

(i) Show that there is a root in the interval $[0, 1]$.

(ii) Apply the bisection method up to five iterations and tabulate the approximate solution and the function value at each iteration.

b) Derive Newton Raphson formula, for finding an approximate root of non-linear equation $f(x) = 0$.

(i) Show that the order of convergence of Newton-Raphson method is two.

(ii) Determine whether, Newton Raphson method can be used to find a root of $x^3 - 2x + 2 = 0$ with the initial approximation $x_0 = 0$.

---

3. a) Show that for distinct real numbers, x_0, x_1,........., x_n, if the function values are y_0, y_1,........., y_n respectively, then, there is a unique polynomial $P_n(x)$ of degree at most n such that $P_n(x_i) = y_i$, for $i = 0, 1, 2, ..., n$.

b) For the given set of data with x values 0,1,2,4,5 and 6, the corresponding function values are 1,14,15,5,6 and 19 respectively.
Determine Newton's divided difference interpolation polynomial using all the data.
Find the value of the polynomial when x=3.

c) Construct the Lagrange interpolation polynomial that passes through the points $(x_i, f(x_i))$; $i = 1, 2, 3$ given by $(2, 0.6931)$, $(2.2, 0.7885)$ and $(2.3, 0.8329)$.
If $f(x) = lnx$ find

(i) the exact value of the function, and

(ii) the error bound

at $x = 2.1$.

---

4. a) Write down the boundary conditions for natural cubic spline for (n+1) points $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ whose function values are $f(x_0), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ respectively, in the usual notation.

A natural cubic spline is defined by

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3 & , 1 \le x \le 2, \\ S_1(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3 & , 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Find B, D, b and d if $S(x)$ passes through the points (1, 1), (2, 1) and (3, 0).

Compute the cubic spline function value when $x = 1.5$.

b) Assuming the curve of the form $y = ae^{bx}$ for the data set $(x_i, y_i); i = 1, 2, 3, 4$ given below, apply the least square approximation and, find a and b.

x_i	1.0	1.25	1.5	1.75
y_i	5	5.8	6.5	7.5

(In the usual notation, for the least square line $y = a + bx$ the least square estimates are given by $\hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)/n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2/n}$ and $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$)

---

5. a) Using the Taylor series expansion of a continuously differentiable function f at the point $x + h$ for some $h > 0$, obtain the forward difference formula for $f'(x)$ to first order approximation ; where $f'(x)$ is the first derivative of the function f at x.

Hence derive the backward difference formula for $f'(x)$ to first order approximation.

Also obtain the error terms of each of the approximations.

(i) Consider the following two data points.

x	0.1	0.3
$f(x)$	1.1052	1.3498

Find the approximate value of f' at each point using the suitable formula.

(ii) Find the error bound if $f(x) = e^x$.

b) In the usual notation, write down three point formula to find the first derivative of a function f, at points which are equally spaced.

A machine is used to fill water tank. The amount of water in the tank (in m^3) at four different times (in *seconds*) are recorded as below:

Time - t	1.0	1.1	1.2	1.3
Amount of water- $v(t)$	4.526	5.990	7.423	8.311

Use the most appropriate three point formula and approximate the rate of filling water of the tank $v'(t)$, (in m^3s^{-1}) at each time listed.

2

6. a) Using Lagrange interpolation polynomial of degree 1, obtain in the usual notation, the Trapezoidal rule with the error term for the approximation of $\int_a^b f(x)dx$.

Find the exact value of $\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$.

Using the Trapezoidal rule

(i) approximate the integral $\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$.

(ii) determine the error bound.

b) State Simpson's $\frac{1}{3}$ rule in approximating the integral $\int_a^b f(x)dx$ with the usual notation.

Hence obtain the expression of the composite Simpson's rule to find $\int_a^b f(x)dx$ for odd number of points $a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{2N} = b$.

The set of 5 data points are recorded as follows:

$(0, 1)$, $(0.25, 0.8)$, $(0.5, 0.5714)$ $(0.75, 0.66)$ and $(1, 0.5)$.

Evaluate the area given by $\int_0^1 f(x)dx$, considering these five points, using composite Simpson's rule.

රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යාවේදී උපාධි (දෙවන ස්ථල) පළමු සමාසික පරීක්ෂණය -ජූලි 2016

විෂයය : ව්‍යවහාරික ගණිතය

පාඨමාලා ඒකකය : AMT212β/ MAM2123 (සංඛ්‍යාත්මක ගණිතය)

කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

විශ්ව විද්‍යාලය මගින් සපයන ලද ගණක යන්ත්‍ර පමණක් භාවිතයට ඉඩ දෙනු ලැබේ.

---

1. (අ) පහත සඳහන් පදයන් විස්තර කරන්න.

   (i) නිරපේක්ෂ දෝෂය.

   (ii) ලෝප දෝෂය.

   (ආ) සත්‍ය අගයන් x_t හා y_t වන සංඛ්‍යා දෙකක් සඳහා පිළිවෙලින් සන්නිකර්ෂණ අගයන් x_a හා y_a ද, අනුරූප නිරපේක්ෂ දෝෂයන් e_x හා e_y ද, වේ.
   $|(x_t + y_t) - (x_a + y_a)| \leq e_x + e_y$, බව පෙන්වන්න.

   (ඇ) $f(x) = (1+x)^{1/2}$ සඳහා $x = 0$ වටා දෙවන මාත්‍රයේ ටේලර් බහුපද සන්නිකර්ෂණය ලබාගන්න. මෙහි $x \in [0, 0.1]$ වේ.

   (i) ලෝප දෝෂය ලියා දක්වන්න.

   (ii) $x \in [0, 0.1]$ සඳහා ලෝප දෝෂයෙහි දෝෂ පර්යන්තය සොයන්න.

   (ඈ) (i) 1101001_2 දශම (decimal)

   (ii) 0.625_{10} ද්විමය (binary)

   බවට හරවන්න.

   (ඉ) පරිමිත සංඛ්‍යා පද්ධතිය තුල ඉපිලෙන ලක්ෂ්‍ය සංඛ්‍යාවක ආකාරය පැහැදිලි කරන්න. IEEE single precision ආකෘතිය භාවිතා කර

   (i) $-20.5_{10} = \text{C1A40000}_{16}$

   (ii) $\text{BF880000}_{16} = -1.0625_{10}$

   බව පෙන්වන්න.

---

2. (අ) $[a, b]$ ප්‍රාන්තරය තුල සන්තතික ශ්‍රිතයක් වන f සඳහා $f(x) = 0$ යන සමීකරණයේ සන්නිකර්ෂණ මූලයක් සෙවීමට භාවිතා වන සමච්ඡේද ක්‍රමය සඳහා ඇල්ගොරිතමය ලියන්න. මෙහි $f(a)$ හා $f(b)$ සඳහා ප්‍රතිවිරුද්ධ ලකුණු ඇත.

සම්බන්ධිතයි.

$x^3 - 5x + 1 = 0$ සමීකරණයේ සන්නිකර්ෂණ මූලයක් සෙවීමට සමච්ඡේද ක්‍රමය යොදා ගන්නේ යැයි සිතමු.

(i) $[0, 1]$ ප්‍රාන්තරය තුල මූලයක් පවතින බව පෙන්වන්න.

(ii) පුනඃකරන පහක් දක්වා සමච්ඡේද ක්‍රමය භාවිතා කර, එක් එක් පුනඃකරනය සඳහා ආසන්න විසඳුම හා ශ්‍රිතයේ අගය වගුගත කරන්න.

(ආ) $f(x) = 0$ යන නිරේඛජ සමීකරණයේ සන්නිකර්ෂණ මූලයක් සෙවීමට භාවිතා වන නිව්ටන්-රැප්සන් සූත්‍රය ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

(i) නිව්ටන්-රැප්සන් ක්‍රමයේ අභිසාරිතා ගණය දෙක බව පෙන්වන්න.

(ii) $x^3 - 2x + 2 = 0$ හි මූලයක් සෙවීමට ආරම්භක අගය $x_0 = 0$ සමග නිව්ටන්-රැප්සන් ක්‍රමය භාවිතා කල හැකිද යන්න නිර්ණය කරන්න.

---

3. (අ) $x_0, x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n$ යන ප්‍රභින්න තාත්වික සංඛ්‍යා සඳහා ශ්‍රිතයේ අගයයන් පිළිවෙලින් $y_0, y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n$ නම්, $P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$ වන පරිදි උඩත් පිරිසෙයින් මාත්‍රය n වූ $P_n(x)$ අනන්‍ය බහුපදයක් පවතින බව පෙන්වන්න.

(ආ) x හි අගයයන් 0,1,2,4,5 හා 6 වන දෙන ලද දත්ත සමූහයක් සඳහා, අදාළ ශ්‍රිතයේ අගයයන් පිළිවෙලින් 1,14,15,5,6 හා 19 වේ.
සියළුම දත්ත භාවිතා කරමින් නිව්ටන්ගේ භාජිත අන්තර්නිවේශන බහුපදය නිර්ණය කරන්න.
$x = 3$ විට බහුපදයේ අගය සොයන්න.

(ඇ) $(2, 0.6931)$, $(2.2, 0.7885)$ හා $(2.3, 0.8329)$ මඟින් දෙනු ලබන $(x_i, f(x_i));\ i = 1, 2, 3$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ලග්රාන්ජ් අන්තර්නිවේශන බහුපදය ගොඩනගන්න.
$f(x) = lnx$ නම්, $x = 2.1$ දී

(i) ශ්‍රිතයේ සත්‍ය අගය සහ

(ii) දෝෂ පර්යන්තය

සොයන්න.

---

4. (අ) ශ්‍රිතයේ අගයයන් පිළිවෙලින් $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, වන $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ලක්ෂ්‍ය (n+1) සඳහා natural cubic spline ට අදාළ මායිම් අවශ්‍යතාවන් සුපුරුදු අංකනයෙන් ලියා දක්වන්න.

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3 & , 1 \leq x \leq 2, \\ S_1(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3 & , 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

ලෙස natural cubic spline එකක් අර්ථ දක්වා ඇත.

$S(x)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ හා $(3, 0)$ යන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන්නේ නම්, B, D, b හා d සොයන්න.

$x = 1.5$ විට cubic spline ශ්‍රිතයේ අගය ගණනය කරන්න.

සම්බන්ධිතයි.

(ආ) පහත දෙන ලද $(x_i, y_i); i = 1, 2, 3, 4$ දත්ත සඳහා $y = ae^{bx}$ ආකාරයේ වක්‍රය උපකල්පනය කර, අඩුතම වර්ග සන්නිකර්ෂණය යොදාගනිමින් a හා b සොයන්න.

x_i	1.0	1.25	1.5	1.75
y_i	5	5.8	6.5	7.5

(සුපුරුදු අංකනයෙන් $y = a + bx$ අඩුතම වර්ග රේඛාව සඳහා අඩුතම වර්ග නිමිතයන්

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)/n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2/n}$$ හා $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ මඟින් දෙනු ලැබේ.)

---

5. (අ) සන්තතිකව අවකලය වන f ශ්‍රිතයක, කිසියම $h > 0$ සඳහා $x+h$ ලක්ෂයේදී ටේලර් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය භාවිතා කරමින්, $f'(x)$ සඳහා පළමු සණයේ සන්නිකර්ෂණයට අදාළව forward difference සූත්‍රය ලබා ගන්න ; මෙහි $f'(x)$ යනු x හිදී f ශ්‍රිතයේ පළමු ව්‍යුත්පන්නයයි.

එනයින්, $f'(x)$ සඳහා පළමු සණයේ සන්නිකර්ෂණයට අදාළව backward difference සූත්‍රය ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

තවද, එක් එක් සන්නිකර්ෂණයට අදාළ දෝෂ ප්‍රකාශන ලබාගන්න.

(i) පහත දත්ත දෙක සලකන්න.

x	0.1	0.3
$f(x)$	1.1052	1.3498

සුදුසු සූත්‍රය භාවිතා කර, එක් එක් ලක්ෂයේදී f' හි ආසන්න අගය සොයන්න.

(ii) $f(x) = e^x$ නම්, දෝෂ පර්යන්තය සොයන්න.

(ආ) සම දුරින් පිහිටි ලක්ෂ මතදී, f ශ්‍රිතයේ පළමු ව්‍යුත්පන්නය සෙවීම සඳහා ලක්ෂ තුනේ සූත්‍ර සුපුරුදු අංකනයෙන් ලියා දක්වන්න.

ජල ටැංකියක් පිරවීම සඳහා යන්ත්‍රයක් භාවිතා කරනු ලැබේ. වෙනස් කාල (තත්පර වලින්) හතරකදී ජල ටැංකියේ ඇති ජල ප්‍රමාණය (m^3 වලින්) පහත සඳහන් පරිදි වාර්තා කර ඇත.

කාලය - t	1.0	1.1	1.2	1.3
ජල ප්‍රමාණය - $v(t)$	4.526	5.990	7.423	8.311

වඩාත්ම සුදුසු ලක්ෂ තුනේ සූත්‍රය භාවිතා කර දී ඇති එක් එක් කාලවලදී ටැංකියට ජලය පිරීමේ වේගය $v'(t)$ (m^3s^{-1} වලින්) සන්නිකර්ෂණය කරන්න.

---

6. (අ) මාත්‍රය 1 වූ ලග්රාන්ජ් අන්තර්නිවේශන බහුපදය භාවිතා කරමින්, $\int_a^b f(x)dx$ ආසන්න කිරීම සඳහා ත්‍රිපීසියානු නීතිය දෝෂ ප්‍රකාශන සහිතව, සුපුරුදු අංකනයෙන් ලබාගන්න.

$\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$ හි සත්‍ය අගය සොයන්න.

ත්‍රිපීසියානු නීතිය භාවිතයෙන්,

(i) $\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$ අනුකලය ආසන්න කරන්න.

(ii) දෝෂ පර්යන්තය නිර්ණය කරන්න.

(ආ) $\int_a^b f(x)dx$ අනුකලය ආසන්න කිරීම සඳහා සිම්සන්ගේ $\frac{1}{3}$ නීතිය සුපුරුදු අංකනයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

එනයින්, $\int_a^b f(x)dx$ සෙවීමට $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2N} = b$, ඔත්තේ ලක්ෂ්‍ය සංඛ්‍යාව සඳහා සංයුක්ත සිම්සන් නීතියේ ප්‍රකාශනය ලබාගන්න.

දත්ත ලක්ෂ්‍ය 5 ක් පහත පරිදි දක්වා ඇත.

$(0,1)$, $(0.25,0.8)$, $(0.5,0.5714)$ $(0.75,0.66)$ හා $(1,0.5)$.

ඉහත ලක්ෂ්‍ය පහ සලකමින්, සංයුක්ත සිම්සන් නීතිය භාවිතා කර $\int_0^1 f(x)dx$ මඟින් දෙනු ලබන වර්ග ඵලය අගයන්න.

අවසාන පිටුව.