UNIVERSITY OF RUHUNA
FACULTY OF SCIENCE
Bachelor of Science General Degree
Level III (Semester I) Examination - July 2016

SUBJECT: APPLIED MATHEMATICS/ INDUSTRIAL MATHEMATICS

COURSE UNIT: AMT 312β/ IMT 312β/ MAM 3133 – MATHEMATICAL MODELLING III

INSTRUCTIONS:

- Show all work, simplify your answers and write out your work neatly for full credit.
- Answer only **FOUR (4)** questions selecting **TWO (2)** from each section.
- Time Allowed: **TWO** hours.

SECTION A

1. (a) Draw
   (i) a simple graph,
   (ii) a non-simple graph with no loops,
   (iii) a non-simple graph with no multiple edges,
   each with ***five vertices*** and ***eight edges***.

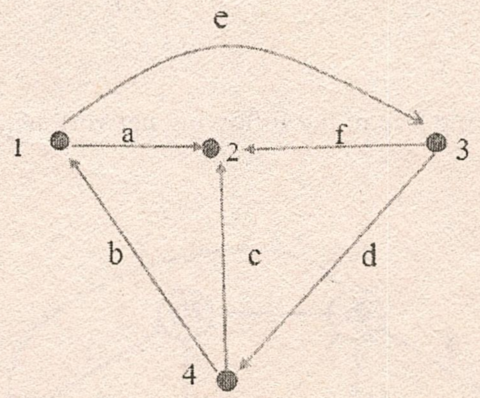
   (b) Draw the following graphs:

   (i) the complete graph K_6;

   (ii) the complete bipartite graph $K_{2,4}$;

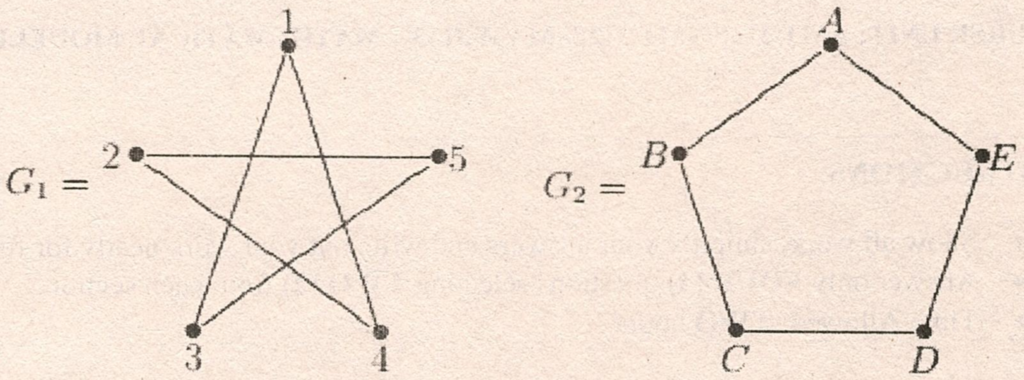
   (iii) the complement of the cycle graph C_4.

   (c) Write down the **adjacency matrix** and the **incidence matrix** of the following graph:



P.T.O

(d) Let G_1 and G_2 be the graphs given below:

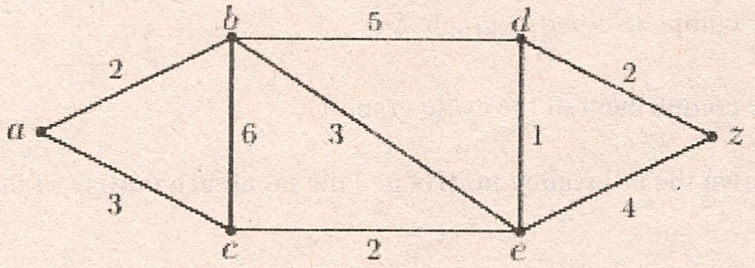


(i) Write down the number of vertices, the number of edges and the degree sequence of the graph G_1.

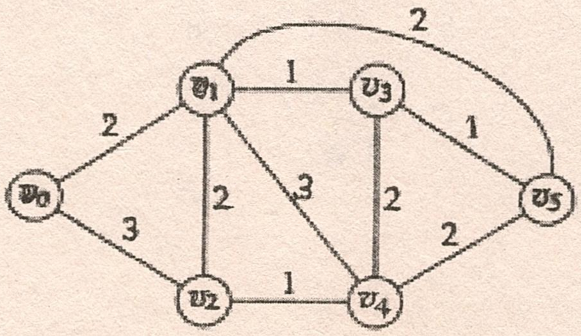
(ii) Verify the hand-shaking lemma.

(iii) Show that G_1 isomorphic to G_2.

2. (a) Use Matrix version of *Prim's algorithm* to find a minimum spanning tree in the following weighted graph. Use alphabetical order to break ties.

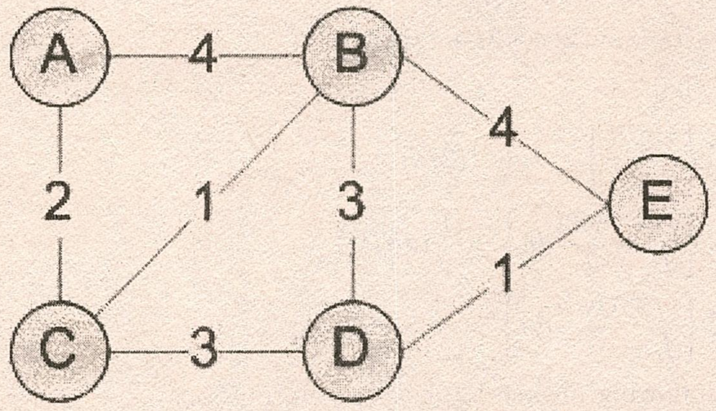


(b) Obtain a minimal spanning tree in the following network using *Kruskal's algorithem*:

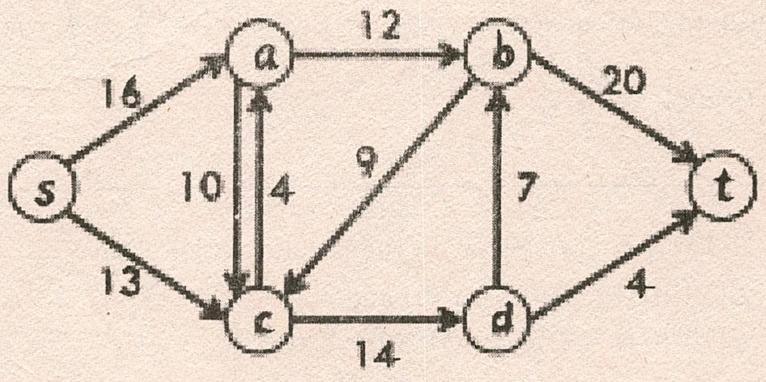


Cts...

3. (a) The following network gives the routes and their lengths in miles between five cities; A, B, C, D and E. The route C to B is directional so that no traffic is allowed from **B** to C directly. All the other routes allow traffic in both directions. Use the *Floyd Warshall alogorithem* to find the shortest routes between any two cities.



(b) Using the *Ford – Fulkerson algorithm*, find the maximal flow from source "s" to sink "t".



Section B

1. a) Find the Laplace transforms of the following functions:

(i) $F_1(t) = e^{3t} + e^{-t}\cos 2t$,

(ii) $F_2(t) = \sin 2t \cos 3t + t \sin 4t$.

b) Show that

(i) $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin 2t}{t}\right\} = \tan^{-1}(2/s)$

(ii) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin 2u}{u} du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}(2/s)$.

(iii) $\mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du\right\} = \frac{1}{2s} ln(s^2+1)$.

c) Find following inverse Laplace transformations

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+13}\right\}$ (ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$

d) Use Convolution theorem to evaluate $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\}$

[In the usual notation, you may assume that $\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du$ and $\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s}$.]

---

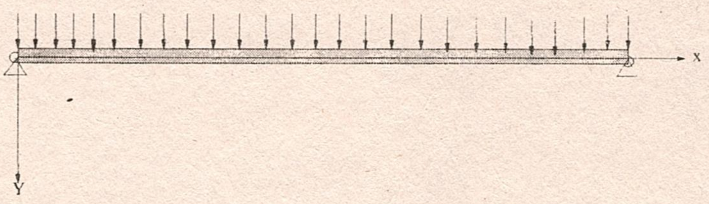
2. a) Let $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$. Show, in the usual notation, that

(i) $\mathcal{L}\{Y^{(1)}(t)\} = sy(s) - Y(0)$ and

(ii) $\mathcal{L}\{Y^{(2)}(t)\} = s^2y(s) - sY(0) - Y'(0)$.

write down an expression for $\mathcal{L}\{Y^{(4)}(t)\}$.

b) A light beam which is hinged at its ends $x = 0$ and $x = l$ carries a uniform load w per unit length (see following figure). Find the deflection at any point using Laplace Transform methods.



[You may assume in the usual notation that the deflection Y at point x of the beam is given by the differential equation. $EI\frac{d^4Y}{dx^4} = w$.]

Continued.

3. a) Show,in the usual notation, that

(i) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right\} = su(x,s) - U(x,0)$

(ii) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right\} = s^2u(x,s) - sU(x,0) - U_t(x,0)$

(iii) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right\} = \dfrac{du(x,s)}{dx}$ and

(iv) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right\} = \dfrac{d^2u(x,s)}{dx^2}$.

b) A string is stretched between two fixed points $(0,0)$ and $(a,0)$. If it is displaced in to the curve $b\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ and released from rest in that position at $t=0$, find its displacement at any time $t>0$ and at any position $0<x<a$. The corresponding mathematical model is:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$U(0,t)=0$, $U(a,t)=0$

$U(x,0) = b\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$

where $U(x,t)$ is the displacement of the string at time t and position x, and c is a constant.

රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යා පීඨය
විද්‍යාවේදී සමාන්‍ය උපාධි
තෙවන ස්ථලය (පලමු සමාසිකය) පරීක්ෂණය - **2016** ජූලි

විෂයය: ව්‍යවහාරික ගණිතය/ කර්මාන්ත ගණිතය

පාඨමාලා ඒකකය: **AMT 312β/ IMT 312β/ MAM 3133** – ගණිතමය ආකෘතිකරණය **III**

උපදෙස්:

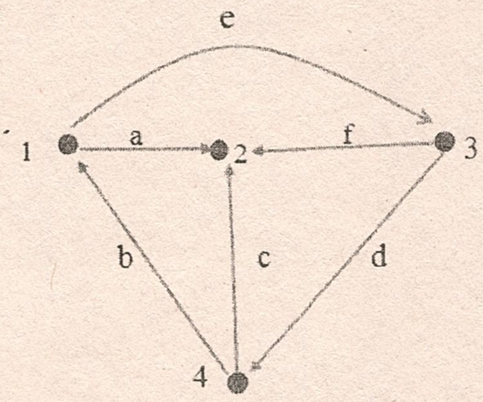
- **එක කොටසකින් ප්‍රශ්න දෙක (02) බගින් තෝර ගනිමින්, ප්‍රශ්න හතරකට (04) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.**
- **කාලය:** පැය දෙකයි (02).

<u>A කොටස</u>

1. (a) පහත එකිනෙකක් **ශීර්ෂ** පහක් හා දාර අටක් ඇතිව අඳින්න:
   - (i) සරල ප්‍රස්ථාරයක්,
   - (ii) පුඩු නොමැති, සරල නොවන ප්‍රස්ථාරයක්,
   - (iii) බහු දාර නොමැති, සරල නොවන ප්‍රස්ථාරයක්.

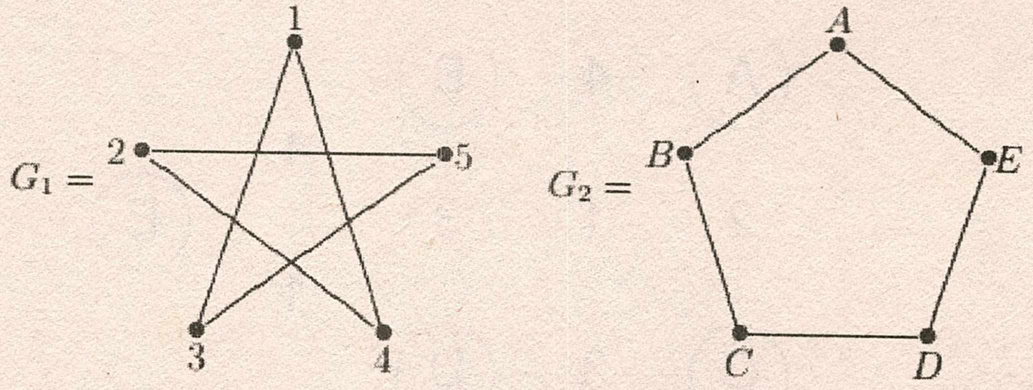
   (b) පහත ප්‍රස්ථාර අඳින්න:
   - (i) K_6, පූර්ණ ප්‍රස්ථාරය,
   - (ii) $K_{2,4}$, පූර්ණ ද්විශාඛ ප්‍රස්ථාරය,
   - (iii) C_4 චක්‍ර ප්‍රස්ථාරයෙහි අනුපූරක ප්‍රස්ථාරය.

   (c) පහත ප්‍රස්ථාරයෙහි බද්ධතා න්‍යාසය හා පතන න්‍යාසය ලියා දක්වන්න:



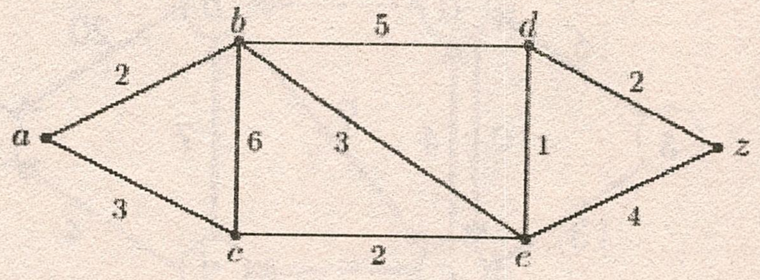
P.T.O

(d) G_1 හා G_2 යනු පහත දෙන ලද ප්‍රස්ථාර යැයි ගනිමු:

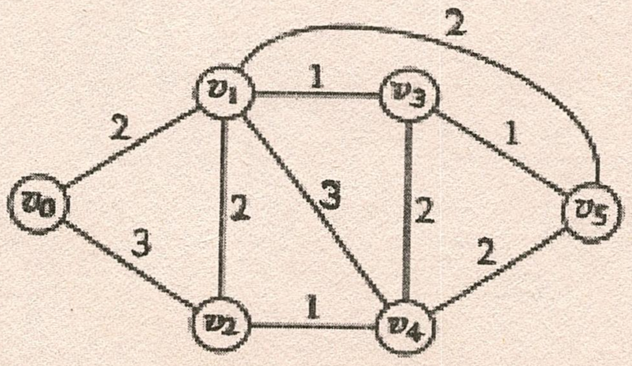


(i) G_1 ප්‍රස්ථාරයෙහි, ශීර්ෂ ගණන, දාර ගණන හා අනුක්‍රම මාතය ලියා දක්වන්න.
(ii) Hand-shaking උපසාධ්‍යය සත්‍යාපනය කරන්න.
(iii) G_1 යන්න G_2 ට සමරූප බව පෙන්වන්න.

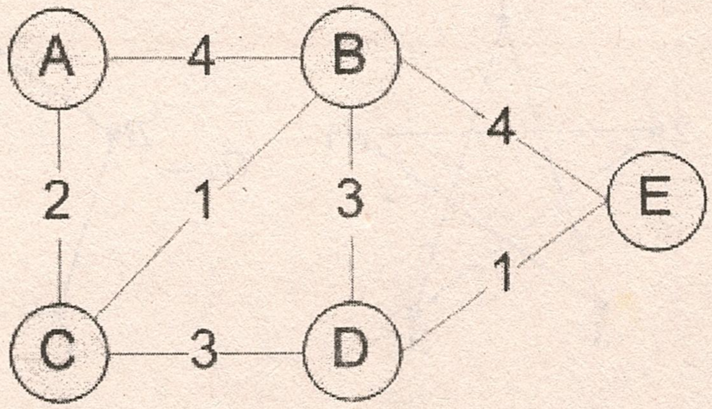
2. (a) පහත හරිත ප්‍රස්ථාරයෙහි, අවම පාරායන රුකක් සෙවීමට, ප්‍රයිම්ස් (*Prim's*) අල්ගොරිතමයෙහි න්‍යාස ආකාරය භාවිතා කරන්න. සමාන අවස්තා රෝධනයට අකාරාදිය යොදන්න.



(b) ක්‍රුස්කාල් (*Kruskal's*) අල්ගොරිතමය භාවිතයෙන්, පහත ජාලයෙහි, අවම පාරායන රුකක් ලබාගන්න:

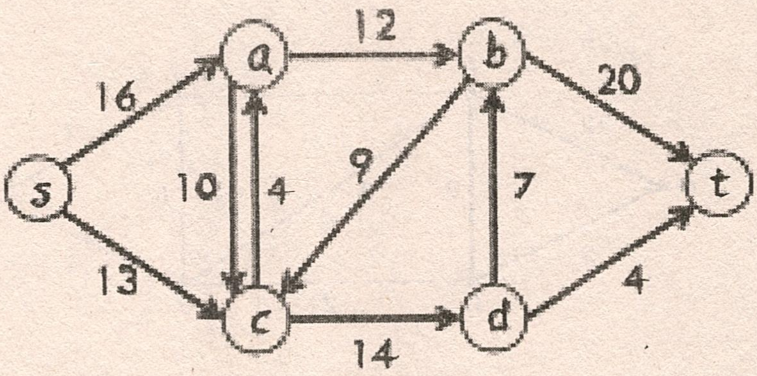


3. (a) A, B, C, D හා E යන නගර පහ අතර මාර්ග හා ඒවායෙහි දිග සැතැපුම් වලින් පහත ප්‍රස්ථායෙන් දෙයි. C සිට B දක්වා මාර්ගය දිශ්‍යා වන අතර B සිට C ට වාහන ගමනාගමනයට ඉඩ නොදෙයි. අනෙකුත් මාර්ග දිශා දෙකටම වාහන ගමනාගමනයට ඉඩ දෙයි. ඕනෑම නගර දෙකක් අතර අවම දුර සෙවිම සදහා ෆ්ලොයිඩ් වොශල් (*Floyd Warshall*) ඇල්ගොරිතමය භාවිතා කරන්න.



(b) ෆොර්ඩ් ෆ්ල්කසන් (*Ford – Fulkerson)* ඇල්ගෝරිතමය භාවිතයෙන් s ප්‍රභවයේ සිට t ගිලුම දක්වා

උපරිම ගැලීම සොයන්න.



B කොටස

1. a) පහත දැක්වෙන ශ්‍රිත වල ලප්ලාස් පරිණාමන සොයන්න:

(i) $F_1(t) = e^{3t} + e^{-t}\cos 2t$,

(ii) $F_2(t) = \sin 2t\cos 3t + t\sin 4t$.

b) (i) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin 2t}{t}\right\} = \tan^{-1}(2/s)$

(ii) $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t \frac{\sin 2u}{u}du\right\} = \dfrac{1}{s}\tan^{-1}(2/s).$

(iii) $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_t^\infty \frac{\cos u}{u}du\right\} = \dfrac{1}{2s}ln(s^2+1).$

බව පෙන්වන්න.

c) පහත දැක්වෙන ප්‍රතිලෝම ලප්ලාස් පරිණාමන සොයන්න:

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+13}\right\}$ (ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\}$ ඇගයීමට පිරිවෙලුම් ප්‍රමේයය භාවිතා කරන්න.

[සුපුරුදු අංකනයෙන් $\mathcal{L}\left\{\dfrac{F(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty f(u)du$ සහ $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t F(u)du\right\} = \dfrac{f(s)}{s}$ බව ඔබට උපකල්පනය කල හැක.]

---

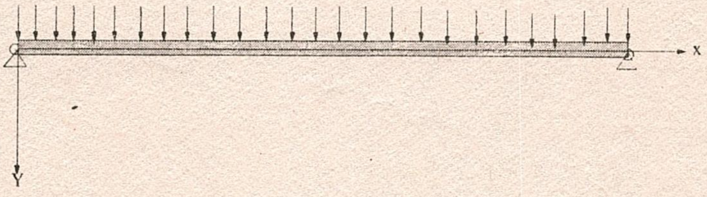
2. (a) $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$ යයි ගන්න. සුපුරුදු අංකනයෙන්

(i) $\mathcal{L}\{Y^{(1)}(t)\} = sy(s) - Y(0)$ සහ

(ii) $\mathcal{L}\{Y^{(2)}(t)\} = s^2y(s) - sY(0) - Y^1(0)$ බව පෙන්වන්න.

බව පෙන්වන්න. $\mathcal{L}\{Y^{(4)}(t)\}$ සඳහා ප්‍රකාශණයක් ලියන්න.

a) සැහැල්ලු බාල්කය එහි $x = 0$ සහ $x = l$ කෙලවරවල් වලදී අසව් කර ඇති අතර ඒකක දිගකට w ඒකකාර භාරයක් දරයි (පහත රූපය බලන්න).



ලප්ලාස් පරිණාමන ක්‍රම භාවිතා කරමින් බාල්කයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යක උත්ක්‍රමණය සොයන්න.

[සුපුරුදු අංකණයෙන් බාල්කයේ x ලක්ෂ්‍යයේ උත්ක්‍රමණය Y යන්න $EI\dfrac{d^4Y}{dx^4} = w$ අවකල සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන බව ඔබට උපකල්පනය කල හැක.]

3. a) සුපුරුදු අංකනයෙන්

(i) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right\} = su(x,s) - U(x,0)$

(ii) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}\right\} = s^2u(x,s) - sU(x,0) - U_t(x,0)$

(iii) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right\} = \dfrac{du(x,s)}{dx}$ සහ

(iv) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right\} = \dfrac{d^2u(x,s)}{dx^2}$

බව පෙන්වන්න

b) තන්තුවක්. $(0,0)$ සහ $(a,0)$ අවල ලක්ෂ්‍ය දෙකකට ඇදා ඇත. එය $b\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ වක්‍රයේ හැඩයට විස්තාපනය කර $t = 0$ දී නිසලතාවයෙන් මුදා හරින ලදී. ඕනෑම $t > 0$ කාලයකදී සහ $0 < x < a$ පිහිටීමක විස්තාපනය සොයන්න.

අදාල ගණිතමය ආකෘතිය:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$U(0,t) = 0,\ U(a,t) = 0$

$U(x,0) = b\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$

වේ.මෙහි $U(x,t)$ යනු t කාලයේදී තන්තුවෙ x ලක්ෂ්‍යයේ විස්තාපනය වන අතර c යනු නියතයකි.

අවසාන පිටුව.