

University of Ruhuna
Bachelor of Science General Degree
Level II (Semester II) Examination - 2016

Subject: Mathematics

Course Unit: MAT224δ (Geometry) .

Time: One (01) Hour

Answer Two(02) Questions Only

1. (a) Show that the perpendicular distance from the point (x_1, y_1, z_1) to the plane $ax + by + cz + d = 0$ is

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Find the locus of a point whose distance from the origin O is 7 times its distance from the plane, $2x + 3y - 6z - 2 = 0$.

- (b) A variable plane which is at a constant distance $3p$ from the origin O cuts the coordinate axes at the points A, B and C .

Show that the locus of the centroid of the triangle ABC is

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$$

and that of the tetrahedron $OABC$ is

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{16}{9p^2}$$

2. (a) Show that the necessary condition to intercept the two spheres

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$$

and

$$S_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$$

orthogonally is

$$2(u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2) = d_1 + d_2.$$

- (b) Find the equation of the sphere which touches the plane $3x + 2y - z + 2 = 0$ at the point $(1, -2, 1)$ and cuts orthogonally the sphere, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.

- (c) Find the equation of the sphere passing through the point $(1, 0, -3)$ and through the circle represented by

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 16 = 0 \quad \text{and} \quad 3x + y + 3z - 4 = 0.$$

- (d) Find the equations of two tangent planes to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$, which are parallel to the plane, $2x + 2y - z = 0$.
-

3. (a) (i) Derive the equation of the tangent plane and the normal line to the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

at the point (α, β, γ) on it. Hence, show that six normals can be drawn to the above ellipsoid from any point outside of the ellipsoid.

- (ii) If A, B, C, A', B', C' are the feet of the six normals drawn from a given point to the above ellipsoid and the equation of the plane ABC is given by $lx + my + nz = p$, prove that the equation of the plane $A'B'C'$ is given by

$$\frac{x}{a^2l} + \frac{y}{b^2m} + \frac{z}{c^2n} + \frac{1}{p} = 0.$$

- (b) Obtain two systems of generators of the following hyperboloid of one sheet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Show that

- (i) no generators of the same system intersect, and
(ii) any two generators of the different systems intersect.
-

- (ආ) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ ගෝලය ප්‍රලම්භව ඡේදනය කරන හා $(1, -2, 1)$ ලක්ෂ්‍යයේදී $3x + 2y - z + 2 = 0$ තලය ස්පර්ශ කරන ගෝලයේ සමීකරණය සොයන්න.
- (ඇ) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 16 = 0$, සහ $3x + y + 3z - 4 = 0$ මගින් දෙනු ලබන වෘත්තය හරහා ගමන් කරන සහ $(1, 0, -3)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරන ගෝලයේ සමීකරණය සොයන්න.
- (ඈ) $2x + 2y - z = 0$ තලයට සමාන්තර වන පරිදි වූ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$ ගෝලයට ඇඳි ස්පර්ශක තල දෙකේ සමීකරණ සොයන්න.

3. (අ) (i)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ඉලිප්සාහයට එය මත ඇති (α, β, γ) ලක්ෂ්‍යයේදී ඇඳි ස්පර්ශ තලයේ සහ අභිලම්භ රේඛාවේ සමීකරණ ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

එමගින්, ඉලිප්සාහයට ඕනෑම බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට අභිලම්භ 6 ක් ඇඳිය හැකි බව පෙන්වන්න.

- (ii) ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක සිට ඉහත සඳහන් ඉලිප්සාහයට ඇඳි අභිලම්භ 6 හි අඩි A, B, C, A', B', C' මගින් නිරූපනය කරනු ලැබේ. ABC තලයේ සමීකරණය $lx + my + nz = p$ ලෙස දී ඇත්නම් A'B'C' තලයේ සමීකරණය

$$\frac{x}{a^2l} + \frac{y}{b^2m} + \frac{z}{c^2n} + \frac{1}{p} = 0,$$

බව පෙන්වන්න.

(ආ)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ඒක ප්‍රස්ථාර බහුවලාහයේ ජනක පද්ධති දෙක ලබා ගන්න.

- (i) එකම පද්ධතියේ ජනක දෙකක් ඡේදනය නොවන බවද,
(ii) වෙනස් පද්ධති දෙකක ඕනෑම ජනක දෙකක් ඡේදනය වන බවද පෙන්වන්න.