University of Ruhuna

Bachelor of Science General Degree
Level II (Semester II) Examination
November/December 2016

Subject: Mathematics
Course Unit: MPM222α/MAT222δ: Real Analysis II
Time: One (01) Hour

Answer Two (02) Questions only.

---

1. (a) Let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of functions on an interval J and $x_0 \in J$. Explain the difference between convergence of $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ at a point x_0 and pointwise convergence of $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ on J. **[10]**

(b) Let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of functions defied by

$$f_n(t) = \frac{1}{n^2t^2+1}, \ t \in \mathbb{R}.$$

(i) Find the pointwise limit function f on $\mathbb{R}$. **[10]**

(ii) Is the pointwise limit function f continuous at $t = 0$? **[05]**

(iii) Is the sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformly convergence on any interval containing zero? Justify your answer. **[05]**

(c) Let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of functions given by $f_n(x) = \dfrac{n}{x+n}$.

(i) Find the pointwise limit f on $\mathbb{R}$. **[10]**

(ii) Show that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ is uniformly convergent to f on $[0, b]$ for any b. **[20]**

(iii) Is the sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformly convergent on $[0, \infty)$? Justify your answer. **[10]**

(d) Let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of functions defined on an interval J. Show that the sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly on J if and only if for every $\epsilon > 0$ and for all $x \in J$ there exists an integer N such that

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon, \ \ \forall n \geq N, \ \ p \geq 1.$$

[30]

---

2. (a) Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions such that

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in [a, b],$$

and let,

$$M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Show that $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly on $[a, b]$ if and only if $M_n \to 0$ as $n \to \infty$. [30]

Let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of functions defined by $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Use the above result to show that the sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly on $[0, \pi]$. [30]

(b) (i) Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^3 + n^2x^2 + 8)}{n(n+1)}$$

is uniformly convergent for $x \in \mathbb{R}$. [20]

(ii) Show that the real valued series

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{4^t} \sin \frac{(x^2 + 5x + 6)}{3^t}$$

is uniformly convergent for $x \in \mathbb{R}$. [20]

---

3. (a) State Cauchy's general principle of convergence for the series of functions. [10]

(b) Prove that $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + 1/n)^n b_n$ is uniformly convergent if $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is convergent. [30]

(c) Let k be a positive real number such that

$$|S_n(x)| = \left|\sum_{r=1}^{n} f_r(x)\right| < k \quad \forall x \in [a, b].$$

Let $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a positive monotonically decreasing sequence that converges uniformly to zero on $[a, b]$. Then, show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ is uniformly convergent on $[a, b]$. [30]

Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$$

is uniformly convergent for all values of x. [30]

රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි (දෙවන ස්ථල) දෙවන සමාසික පරීක්ෂණය නොවැම්බර්/දෙසැම්බර් 2016

විෂයය: ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: : MPM222α/MAT222β (තාත්ත්වික විශ්ලේෂණය II)
කාලය: පැය එකයි (01)

ප්‍රශ්ණ 02 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

1. (අ) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ යනු J ප්‍රාන්තරයක් මත වූ ශ්‍රිතයන්ගේ අනුක්‍රමයක් සහ $x_0 \in J$ යැයි ගන්න. x_0 ලක්ෂයේදී $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ අභිසාරී වීම සහ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ලක්ෂීය ලෙස J මත අභිසාරීවීම යන දෙක අතර වෙනස පැහැදිලි කරන්න. [10]

   (ආ) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ යනු

$$f_n(t) = \frac{1}{n^2t^2+1},\ t \in \mathbb{R}$$

   ලෙස අර්ථ දක්වන ලද ශ්‍රිතයන්ගේ අනුක්‍රමයක් ලෙස ගන්න.

   (i) $\mathbb{R}$ මත ලක්ෂීය ලෙස අභිසාරී f ශ්‍රිතය සොයන්න. [10]

   (ii) $t = 0$ හිදී ලක්ෂීය ලෙස අභිසාරී f ශ්‍රිතය සන්තතික වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. [05]

   (iii) බින්දුව අඩංගු ඕනෑම ප්‍රාන්තරයක් තුල $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ අනුක්‍රමය ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වේද? [05]

   (ඇ) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ යනු $f_n(x) = \dfrac{n}{x+n}$ මගින් දෙනු ලබන ශ්‍රිතයන්ගේ අනුක්‍රමයක් යැයි ගන්න.

   (i) $\mathbb{R}$ මත ලක්ෂීය ලෙස අභිසාරී f ශ්‍රිතය සොයන්න. [10]

   (ii) ඕනෑම b සඳහා $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ අනුක්‍රමය $[0, b]$ මත f ට ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න. [20]

   (iii) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ අනුක්‍රමය $[0, \infty)$ මත ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. [10]

   (ඇ) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ යනු J ප්‍රාන්තරයක් මත අර්ථ දක්වන ලද ශ්‍රිතයන්ගේ අනුක්‍රමයක් යැයි ගන්න. සියලු $\epsilon > 0$ සහ සියලු $x \in J$ සඳහා

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \epsilon,\ \ \forall n \geq N,\ \ p \geq 1$$

   වන පරිදි N නිඛිලයක් පවතින්නේ නම් සහ එනම් පමණක් $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ අනුක්‍රමය J මත ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න. [30]

සම්බන්ධිතයි.

2. අ) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ යනු

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in [a,b],$$

ලෙස පවතින ශ්‍රිතයන්ගේ අනුක්‍රමයක් යැයි සහ

$$M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\},$$

යැයි ගන්න. $n \to \infty$ විට $M_n \to 0$ නම් සහ එනම් පමණක් $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $[a,b]$ මත ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න. [30]

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ යනු $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ මගින් අර්ථ දක්වන ලද ශ්‍රිතයන්ගේ අනුක්‍රමයක් යැයි ගන්න. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ අනුක්‍රමය ඒකාකාරී ලෙස $[0,\pi]$ මත අභිසාරී වන බව පෙන්වීමට ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතා කරන්න. [30]

ආ) (i) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^3 + n^2x^2 + 8)}{n(n+1)}$$

ශ්‍රේණිය ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී බව පෙන්වන්න. [20]

(ii) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{4^t} \sin\frac{(x^2 + 5x + 6)}{3^t}$$

තාත්ත්වික අගයන්ගේ ශ්‍රේණිය ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී බව පෙන්වන්න. [20]

---

3. (අ) ශ්‍රිතයන්ගේ ශ්‍රේණියක් අභිසාරී වීම සඳහා වූ කෝෂි පොදු මූලධර්මය (Cauchy's general principle) සඳහන් කරන්න. [10]

(ආ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ අභිසාරී නම් $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^n b_n$ ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී බව ඔප්පු කරන්න. [30]

(ඇ) k යනු සියලු $x \in [a,b]$ සඳහා $|S_n(x)| = \left|\sum\limits_{r=1}^{n} f_r(x)\right| < k$, වන ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් යැයි ගන්න. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ යනු ඒකවිධව අඩුවන සහ $[a,b]$ මත දී බින්දුවට ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරීවන ධන අනුක්‍රමයක් යැයි ගන්න. එවිට $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ ශ්‍රේණිය $[a,b]$ මත ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න. [30]

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$ ශ්‍රේණිය සියලු x සඳහා ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න. [30]

අවසාන පිටුව.