# University of Ruhuna

## Bachelor of Science General Degree

## Level III (Semester II) Examination - November-2016

Subject: Mathematics

Course Unit: MAT322$\beta$ (Complex variables)

MSP323$\beta$

Time :Two (02) Hours

Answer 04 Questions only.

---

1. (a) The sets $A$ and $B$ are defined as follows:

$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R} \text{ and } x > \alpha\}.$$

and

$$B = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R} \text{ and } \alpha < x < \beta\},$$

where $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and $0 < \alpha < \beta$.

(i) Sketch the sets $A$ and $B$ in the complex plane.

(ii) Explain whether each of the above sets is (a) an open set, (b) a connected set. (c) a domain.

(b) Sketch the regions given by

$$(i)\ |z - i + 2| = 5, \qquad (ii)\ |z - i + 2| > 5,$$
$$(iii)\ |z + 2i| \leq 1, \qquad (iv) Im\, z \geq 0.$$

in the complex plane

(c) Let $a$ be a complex number. Find $\lim_{n\to\infty} a^n$ when $|a| < 1$. Does $\lim_{n\to\infty} a^n$ exist, when $|a| > 1$ ?. Justify your answer.

(d) By substituting $z = re^{i\theta}$, examine the continuity of the function

$$f(z) = \begin{cases} \frac{Re z^2}{|z|^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0, \end{cases}$$

at $z = 0$.

---

2. (a) In the usual notation, obtain Cauchy-Riemann equations in polar form

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = r\frac{\partial u}{\partial r},$$

for the differentiable function $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

Hence, show that the function $f(z) = z^n$, where $n$ is any integer satisfies the Cauchy-Riemann equations.

(b) Find the complex conjugate harmonic function $v(x, y)$ of $u(x, y) = x + y^3 - 3x^2y$ and the corresponding analytical function $f(z)$.

---

**3.** (a) Evaluate each of the integrals:

(i) $I_1 = \oint_{C_1} z^n dz$, $n = 0 \pm 1, \pm 2 \ldots$ where $C_1 : |z| = r$ is traversed in the counter-clockwise direction,

(ii) $I_2 = \oint_{C_2} (z - z_0)^n dz$, $n = 0 \pm 1, \pm 2 \ldots$ where $C_2 : |z - z_0| = r$ is traversed in the counter-clockwise direction,

(iii) $I_3 = \oint_{C_3} \frac{9}{z(z-3)} dz$, where $C_3$ is the curve $|z - 3| = 4$.

(iv) $I_3 = \oint_{C_4} \frac{9}{z(z-3)} dz$, where $C_4$ is the curve $|z - 3| = 2$.

(b) State the Cauchy integral theorem for the integration of complex function. Using theorem and extension evaluate the integral $I = \oint_{|z|=1} f(z)dz$, where

$$f(z) = \frac{3z + 4}{z(z + 2)}.$$

---

**4.** (a) State the Cauchy integral formula. Using formula, evaluate each of the following integrals:

(i) $\oint_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1} dz, \quad n \geq 0$,

(ii) $\oint_C \frac{z+1}{z^2-9} dz$, for the cases $(\alpha)$ $C : |z - 3| = 1$, $(\beta)$ $C : |z + 3| = 1$, $(\gamma)$ $C : |z| = 4$.

(b) State the Cauchy integral formula for derivatives. Evaluate each of the following integrals:

(i) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m} dz, \quad m \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$,

(ii) $\oint_C \frac{dz}{z(z^2-4)e^z} dz$ where $C : |z - 1| = 2$.

---

**5.** (a) (i) By using Cauchy integral formula, in the usual notation, obtain the Taylor series expansion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ where } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

for an analytic function $f(z)$ inside a circle $|z - z_0| = R(> 0)$.

(ii) Find the Taylor series expansion and its radius of convergence of the function

$$f(z) = \frac{1}{(z + 3i)(z + 1)},$$

about $z = 0$.

(b) Find all the possible Taylor and Laurent series expansions about $z = 0$ of the function

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)(z^2 - 4)}.$$

---

6. (a) State clearly the Cauchy residue theorem.
Suppose complex function is given by

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1)(z-i)^3},$$

(i) find all the singular points of $f$,

(ii) find the residues each of the singular points,

(iii) use the Cauchy Riemann theorem to evaluate the integral $\oint_C f(z)dz$ where $C : |z| = 2$.

(b) By Cauchy Riemann theorem, Evaluate the integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x(x^2 + 3^2)} dx.$$

---

# රුහුණු විශ්වවිද්‍යාලය

## සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි (තෙවන ස්ථල) දෙවන සමාසික පරීක්ෂණය නොවැම්බර්-2016

විෂයය: ගණිතය
පඨමාලා ඒකකය: : MAT322$\beta$ (සංකීර්ණ විචල්‍යයන් )

කාලය: පැය දෙක (02) යි

ප්‍රශ්ණ 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

**1.** ( අ) $A$ සහ $B$ කුලකයන් පහත පරිදි අර්ථ දක්වා ඇත:

$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R} \text{ and } x > \alpha\},$$

සහ

$$B = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R} \text{ and } \alpha < x < \beta\},$$

මෙහි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ සහ $0 < \alpha < \beta$ වේ.

(i) $A$ සහ $B$ කුලකයන් සංකීර්ණ තලයේ ලකුණු කරන්න.

(ii) ඉහත $A$ සහ $B$ කුලකයන් $(a)$ විවෘත කුලකයක්, $(b)$ සබැදි කුලකයක්, $(c)$ වසමක්, වේ දැයි පැහැදිලි කරන්න.

( ආ)

$$(i)\ |z - i + 2| = 5, \qquad (ii)\ |z - i + 2| > 5,$$
$$(iii)\ |z + 2i| \leq 1, \qquad (iv) Imz \geq 0.$$

මගින් දෙනු ලබන ප්‍රදේශ සංකීර්ණ තලයේ ලකුණු කරන්න.

( ඇ) $a$ යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු. $|a| < 1$ වන විට $\lim_{n\to\infty} a^n$ හි අගය සොයන්න. $|a| > 1$ වන විට $\lim_{n\to\infty} a^n$ පවතීද ? ඔබේ පිළිතුර සත්‍යාපනය කරන්න.

( ඈ) $z = re^{i\theta}$ යන්න ආදේශයෙන් $z = 0$ ලක්ෂ්‍යයේදී

$$f(z) = \begin{cases} \frac{Rez^2}{|z|^2} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0, \end{cases}$$

ශ්‍රිතය සන්තතිකතාව පරීක්ෂා කරන්න.

---

**2.** ( අ) සුපුරුදු අංකනයෙන්, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ යන අවකල්‍ය ශ්‍රිතය සඳහා ධ්‍රැවක ආකාරයෙන් කෝෂි රීමාන් සමීකරණ

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = r\frac{\partial u}{\partial r},$$

ලබාගන්න. එනයින්, $n$ යනු ඕනෑම නිඛිලයක් වන විට $f(z) = z^n$ ශ්‍රිතය කෝෂි රීමාන් සමීකරණ තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.
තවද, $f'(z)$ සොයන්න.



සම්බන්ධිතයි.

( ආ) $u(x, y) = x + y^3 - 3x^2y$ ශ්‍රිතයෙහි අනුවර්තීය සංකීරණ ප්‍රතිබද්ධය $v(x, y)$ සහ අනුරූප විශ්ලේෂී ශ්‍රිතය $f(z)$ සොයන්න.

---

3. ( අ) පහත සඳහන් එක් එක් අනුකලයන් අගයන්න.

(i) $I_1 = \oint_{C_1} z^n dz$, $n = 0 \pm 1, \pm 2 \dots$ මෙහි $C_1 : |z| = r$ යනු වාමාවර්ත දිශාවට වූ පරි පරිවක්‍රයකි,

(ii) $I_2 = \oint_{C_2} (z - z_0)^n dz$, $n = 0 \pm 1, \pm 2 \dots$ මෙහි $C_2 : |z - z_0| = r$ යනු වාමාවර්ත දිශාවට වූ පරි පරිවක්‍රයකි,

(iii) $I_3 = \oint_{C_3} \frac{9}{z(z-3)} dz$, මෙහි $C_3$ යනු $|z - 3| = 4$ වාමාවර්ත දිශාවට වූ වක්‍රයකි,

(iv) $I_3 = \oint_{C_4} \frac{9}{z(z-3)} dz$, මෙහි $C_4$ යනු $|z - 3| = 2$ වාමාවර්ත දිශාවට වූ වක්‍රයකි,

( ආ) සංකීර්ණ ශ්‍රිතයක් සඳහා වන කෝෂී අනුකලන ප්‍රමේය ප්‍රකාශ කරන්න.
කෝෂී අනුකලන ප්‍රමේය සහ එහි විස්තාරය භාවිතයෙන් $I = \oint_{|z|=1} f(z) dz$, යන අනුකලනය අගයන්න. මෙහි

$$f(z) = \frac{3z + 4}{z(z + 2)},$$

වේ.

---

4. ( අ) කෝෂී අනුකලන සූත්‍රය සඳහන් කරන්න.
සූත්‍රය භාවිතයෙන්, පහත සඳහන් එක් එක් අනුකලයන් අගයන්න:

(i) $\oint_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1} dz, \quad n \geq 0,$

(ii) අවස්ථාවන් සඳහා $(\alpha)$ $C : |z - 3| = 1$, $(\beta)$ $C : |z + 3| = 1$, $(\gamma)$ $C : |z| = 4$, $\oint_C \frac{z+1}{z^2-9} dz.$

( ආ) අවකලනය සඳහා වන කෝෂී අනුකලන සූත්‍රය සඳහන් කරන්න.
පහත සඳහන් එක් එක් අනුකලයන් අගයන්න.

(i) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m} dz, \quad m \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty),$

(ii) $\oint_C \frac{dz}{z(z^2-4)e^z} dz$ මෙහි $C : |z - 1| = 2.$

---

5. ( අ) (i) කෝෂී අනුකලන සූත්‍රය භාවිතයෙන් සුපුරුදු අංකනයෙන්, $|z - z_0| = R (> 0)$ වන වෘත්තාකාර කොටස තුළදී $f(z)$ විශ්ලේෂී ශ්‍රිතය සඳහා ටේලර් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \; ; \; a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

ආකාරයෙන් ලබාගන්න.

(ii) $z = 0$ ලක්ෂ්‍යය වටා

$$f(z) = \frac{1}{(z+3i)(z+1)}$$

ශ්‍රිතයේ ටේලර් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය සහ එහි අභිසාරී අරය සොයන්න.

( ආ) $z = 0$ ලක්ෂ්‍යය වටා

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)}$$

ශ්‍රිතයට පැවතිය හැකි සියලුම ටේලර් සහ ලෝරන්ට් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණයන් සොයන්න.

---

**6.** ( අ) කෝෂී අවශිෂ්ඨ ප්‍රමේය ප්‍රකාශ කරන්න.

සංකීර්ණ ශ්‍රිතයක්

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1)(z-i)^3}$$

මගින් දී ඇතැයි සිතන්න.

(i) $f$ හි සියලුම අපූර්ව ලක්ෂ සොයන්න.

(ii) එක් එක් අපූර්තා ලක්ෂ්‍යයන්හි අවශිෂ්ඨ සොයන්න.

(iii) $\oint_C f(z)dz$; $C : |z| = 2$, ඇගයීම සඳහා කෝෂී අවශිෂ්ඨ ප්‍රමේය භාවිතා කරන්න.

( ආ)

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x(x^2+3^2)}dx$$

කෝෂී අවශිෂ්ඨ ප්‍රමේය භාවිතයෙන් අනුකලය අගයන්න.

---



අවසාන පිටුව.