University of Ruhuna

Bachelor of Science General Degree

Level II (Semester II) Examination - January 2018

Subject: Mathematics
Course Unit: MAT222δ (Real Analysis II)

Time :One (01) Hour

Answer Two (02) Questions only.

---

1. a) In the usual notation, define

   (i) the pointwise convergence, and

   (ii) the uniform convergence

   for a functional sequence $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ on $D \subset \mathbb{R}$.

   b) Determine whether each of the functional sequences has a pointwise limit, if so find it.

   (i) Functional sequence

   $$f_n(k) = n(mod\, k), \quad k \in \{1,2,3\},$$

   where $n(mod\, k)$ is the remainder when n is divided by k,

   (ii) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ on [0,3].

   c) Show that $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to f(x)$ uniformly on $[a,b]$ if and only if $M_n \to 0$ as $n \to \infty$ where $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ is a functional sequence such that

   $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ for } x \in [a,b], \text{ and}$$

   $$M_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

   Hence, determine the uniform convergence of each of the following cases.

   (i) $f_n(x) = x(1-\frac{1}{n})$ and $g_n(x) = \frac{1}{x^2}$ for $x \in (0,1)$. How about their product ?. Justify your answer.

   (ii) $f_n(x) = x^2e^{-nx}$ for $x > 0$.

   d) Show that the functional sequence $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, where

   $$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \le x \le 1/n \\ -n^2x + 2n, & 1/n \le x \le 2/n \\ 0, & 2/n \le x \le 1 \end{cases}$$

   is not uniformly convergent on [0,1], by stating clearly the theorem you may use.

Continued.

2. a) Consider the following functional series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{[(n+1)x+1](nx+1)},$$

define on $[a, b]$ where $0 < a < b$.

(i) Write down an expression for the partial sum of the above series.

(ii) Find the sum function of the above series.

(iii) Show that the above series is not uniformly convergent on $[0, b]$, by stating clearly the theorem you may use.

b) In the usual notation, state the Weierstrass M test for functional series.
Hence, determine the uniform convergence of each of the following functional series.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+n^2x^2}$ on [2,5],

(ii)

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2^2x^3}{1+x^4} + \frac{2^3x^5}{1+x^8} + \ldots \text{on}[-1/2, 1/2].$$

3. a) By using properties of uniform convergence, compute

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

where $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ and

$$f_n(x) = \frac{nx + \sin(nx^2)}{n}.$$

b) In the usual notation, state and prove the Dirichlet test for a functional sequence.
[you may assume that for a_n and b_n real sequences, it can be defined the Abel's partial sum identity as

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k),$$

where $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.]
Hence, show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2},$$

is uniformly convergent for all $x \in \mathbb{R}$.

c) Let

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2},\ x \in [-1, 1].$$

Discuss the uniform convergence of $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ and the differentiability of the limit function at $x = 0$.

රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි දෙවන ස්ථලය (දෙවන සමාසික)

පරීක්ෂණය - ජනවාරි 2018

විෂයය: ගණිතය

පාඨමාලා ඒකකය: : MAT222δ (තාත්ත්වික විශ්ලේෂණය II). කාලය: පැය එකයි (01)

ප්‍රශ්න දෙකකට (02) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. a) සුපුරුදු අංකනයෙන්,

   (i) ලක්ෂීය ලෙස අභිසාරිතාව, සහ

   (ii) ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරිතාව,

   $D \subset \mathbb{R}$ වසම තුල වන $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ශ්‍රිත අනුක්‍රමය සඳහා අර්ථ දක්වන්න.

   b) එක් එක් ශ්‍රිත අනුක්‍රමයන් සඳහා ලක්ෂීය සීමාවක් තිබෙ දැයි නිර්ණය කරන්න. එසේ නම් එය සොයන්න.

   (i) ශ්‍රිත අනුක්‍රමය

   $$f_n(k) = n(\text{ මාපා } k), \quad k \in \{1, 2, 3\},$$

   මෙහි $n($ මාපා $k)$ යනු n යන්න k වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය වේ.

   (ii) [0,3] වසම තුල වූ $f_n(x) = e^{-nx^2}$.

   c) $[a, b]$ මත $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to f(x)$ ඒකාකාරී වනුයේ $n \to \infty$ විට $M_n \to 0$ වන්නේ නම් හා නම්ම පමණක් බව පෙන්වන්න. මෙහි $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ යනු $x \in [a, b]$ සඳහා,

   $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

   වූ ශ්‍රිත අනුක්‍රමයක් සහ

   $$M_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

   වේ.

   එනයින් පහත සඳහන් එක් එක් අවස්ථාවන් සඳහා ඒකාකාරී අභිසාරිතාව නිර්ණය කරන්න.

   (i) $x \in (0, 1)$ සඳහා $f_n(x) = x(1 - \frac{1}{n})$ සහ $g_n(x) = \frac{1}{x^2}$. ඒවායේ ගුණිතයට කුමක් සිදු වේද ? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

   (ii) $x > 0$ සඳහා $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$.

සම්බන්ධිතයි.

d) ඔබ භාවිතා කරනු ලබන ප්‍රමේයයන් පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරමින් $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ශ්‍රිත අනුක්‍රමය [0,1] මත අභිසාරී නොවන බව පෙන්වන්න. මෙහි

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \le x \le 1/n \\ -n^2x + 2n, & 1/n \le x \le 2/n \\ 0, & 2/n \le x \le 1 \end{cases}$$

වේ.

---

2. a) $[a, b]$ මත අර්ථ දක්වනු ලබන පහත සඳහන් ශ්‍රිත ශ්‍රේණිය සලකන්න.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{[(n+1)x+1](nx+1)},$$

මෙහි $0 < a < b$.

(i) ඉහත ශ්‍රේණියෙහි ආංශික ඓක්‍යය සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.

(ii) ඔබ භාවිතා කරනු ලබන ප්‍රමේයයන් පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරමින් $[0, b]$ මත දී ඉහත ශ්‍රේණිය ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී නොවන බව පෙන්වන්න.

b) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ශ්‍රිත ශ්‍රේණියක් සඳහා වයස්ට්‍රාස් M පරීක්ෂාව (Weierstrass M test) ප්‍රකාශ කරන්න.
එනයින්, පහත සඳහන් එක් එක් ශ්‍රේණි ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(i) [2,5] මත වූ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+n^2x^2}$,

(ii) [-1/2, 1/2] මත වූ

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2^2x^3}{1+x^4} + \frac{2^3x^5}{1+x^8} + \dots.$$

---

3. a) ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරීතාවයේ ගුණාංග භාවිතයෙන්

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

අගයන්න. මෙහි $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ සහ

$$f_n(x) = \frac{nx + \sin(nx^2)}{n}$$

වේ.

b) සුපුරුදු අංකනයෙන් ශ්‍රිත අනුක්‍රමයක් සඳහා ඩිරිච්ලට් පරීක්ෂාව (Dirichlet test) ප්‍රකාශකර එය සාධනය කරන්න.

[a_n සහ b_n යන තාත්ත්වික අනුක්‍රමයන් සඳහා ආබෙල්ගේ ආංශික ඓක්‍යය සර්වසාමය (Abel's partial sum identity)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k),$$

ලෙස ඔබට උපකල්පනය කල හැකිය. මෙහි $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ වේ.]

එනයින් සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$$

ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න.

c) $x \in [-1, 1]$ සඳහා

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}, \ .$$

ලෙස ගනිමු. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ශ්‍රිතයේ ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරීතාවය සහ $x = 0$ ලක්ෂයේදී සීමා ශ්‍රිතයේ අවකල්‍යතාව පිළිබඳව සාකච්ඡා කරන්න.

අවසාන පිටුව.