රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

2016/2017 ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය/ විශේෂ) උපාධි 2000 ස්ථලය

පළමු සමාසික පරීක්ෂණය - 2017 ඔක්තෝබර්/නොවැම්බර්

STS 21523/STS21623 – අන්තර් මධ්‍යයික ගණිතය

ප්‍රශ්න හතරකට (04) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ගණක යන්ත්‍ර භාවිතයට අවසර ඇත.

කාලය: පැය 03 යි.

1.

(අ) පහත එක් එක් සීමා පවතී නම් ගණනය කරන්න.

(i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

(ii) $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

(iii) $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x + 3}{x + 1}$

(iv) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{3x^2 + 2x - 7}$

(v) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3 + 2x + 1}{x - 3}$

(ලකුණු 10 යි)

(ආ) එක්තරා භාණ්ඩ x ප්‍රමාණයක් නිෂ්පාදනය සඳහා යන මුළු වියදම රුපියල් $C(x) = 75x + 120,000$ බව ශ්‍රිතයක් මගින් ආකෘතිකරණය කල හැකි බව ව්‍යාපාරික කළමනාකාරවරයෙකු සොයා ගනී. මධ්‍යනය වියදම $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ වේ. $\lim_{x \to +\infty} A(x)$ සොයා ඔබගේ පිළිතුරෙහි අර්ථය පහදන්න.

(ලකුණු 05 යි)

2.

(අ) දී ඇති ශ්‍රිත x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

(i) $y = 3x^5 - 4x^3 + 9x - 6$

(ii) $y = (x^2 + 2)(x + \sqrt{x})$

(iii) $y = \dfrac{2x - 1}{1 - x^3}$

(iv) $u = 1 - x^2$ විට $y = 2u^2 - u + 5$.

(ලකුණු 08 යි)

35

(ආ) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්ථාරයට $x = 2$ හිදී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

(ලකුණු 03 යි)

(ඇ) එක්තරා කර්මාන්තශාලාවක රැකියාව සඳහා උදෑසන 8.00 ට වැඩමුරයට පැමිණෙන සේවකයෙකු, පැය t කාලයට පසු ඒකක $Q(t) = -t^3 + 8t + 15t$ ප්‍රමාණයක් නිෂ්පාදන කරන බව ඵලදායිතා අධ්‍යයනයකින් පෙන්වාදෙයි.

(i) සේවකයෙකුගේ නිෂ්පාදනයේ ශීඝ්‍රතාවය $R(t) = Q'(t)$ ගණනය කරන්න.

(ii) වේලාව උදෑසන 9.00 වනවිට සේවකයෙකුගේ නිෂ්පාදනයේ ශීඝ්‍රතාවය වෙනස්වීමේ ශීඝ්‍රතාවය කුමක්ද?

(ලකුණු 04යි)

3. (අ) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-5}$ හි ප්‍රස්ථාරයේ සියළු තිරස් සහ සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ සොයන්න.

(ලකුණු 08යි)

(ආ) භාණ්ඩ x ප්‍රමාණයක් නිෂ්පාදනකිරීම සඳහා යන මුළු වියදම රුපියල් $C(x)$ බව නිෂ්පාදකවරයෙකු නිමානය කරයි, මෙහි $C(x) = x^3 - 24x^2 + 350x + 338$ වේ. ආන්තික වියදම $C'(x)$ සොයන්න.

(ලකුණු 03යි)

(ඇ) අධ්‍යාහෘත අවකලනය (implicit differentiation) මගින් $5x - x^2y^3 = 2y$ හි $\dfrac{dy}{dx}$ සොයන්න.

(ලකුණු 04යි)

4.

(අ) $\det(A) = 0$ වන සියළුම λ අගයන් සොයන්න, මෙහි $A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{pmatrix}$ වේ.

(ලකුණු 03යි)

(ආ) A^{-1} සොයන්න, මෙහි $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 11 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ වේ.

(ලකුණු 05යි)

(ඇ) ඉහත (ආ) කොටස භාවිතයෙන්

$$4x + 5y = 9$$
$$11x + y + 2z = 3$$
$$x + 5y + 2z = 1$$

සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න. (ලකුණු 04යි)

(ඈ) පුද්ගලයෙකු ඇපල් සහ පීච් යන පළතුරු දෙවර්ගය ආනයනය කරයි. එක් එක් පළතුරු වර්ගය වෙනස් වූ විකුණුම් ස්ථාන තුනකට බෙදාහරී. i වන පළතුර j වන ස්ථානයට බෙදාහරින ලද ඒකක ප්‍රමාණය $A = \begin{pmatrix} 125 & 100 & 75 \\ 100 & 175 & 125 \end{pmatrix}$ න්‍යාසයේ a_{ij} මගින් දැක්වේ.

ඒකකයක් සඳහා ලැබෙන ලාභය $B = \begin{pmatrix} \$3.50 & \$6.00 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය මගින් දැක්වේ. BA ගුණිතය සොයා ගුණිතයේ එක් එක් අගයන් මගින් දැක්වෙන්නේ කුමක් දැයි ප්‍රකාශ කරන්න.

(ලකුණු 03යි)

05. (අ) පහත අනිශ්චිත අනුකල අගයන්න.

(i) $\int (3t^2 - \sqrt{5}\,t + 2)dx$.

(ii) $\int \left(\frac{1}{2y} - \frac{2}{y^2} + \frac{2}{\sqrt{y}} \right) dy$.

(iii) $\int (x^3 - \sqrt{3x} + 5e^{-2x})dx$.

(iv) $\int t(t^2 + 1)^5 dt$.

(ලකුණු 08යි)

36

(ආ) භාණ්ඩ q ප්‍රමාණයක් නිෂ්පාදනකිරීම සඳහා වන ආන්තික වියදම ඒකකයක් සඳහා රුපියල් $C'(q) = 3q^2 - 24q + 48$ ක් බව නිෂ්පාදකවරයෙකු නිමානය කරයි. ඒකක 10 ක් සඳහා නිෂ්පාදන වියදම රුපියල් 5000.00 ක් නම් ඒකක 30 ක් සඳහා නිෂ්පාදන වියදම කුමක් ද?

(ලකුණු 04යි)

(ඇ) $\int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ නිශ්චිත අනුකලය අගයන්න.

(ලකුණු 03යි)

06.

(අ) $f(x) = x^3 + 3x^2$ යැයි ගනිමු.

(i) $f'(x)$ සොයා $f(x)$ හි වැඩිවන සහ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න. $f(x)$ හි ස්ථානීය උපරිම සහ අවම සොයන්න.

(ii) $f''(x)$ සොයා, $f(x)$ සඳහා අවතලතා ප්‍රාන්තර නිර්ණය කරන්න. $f(x)$ හි නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

(iii) අනන්තයේ සීමා (limits at infinity) සොයන්න.

(iv) x හි අන්ත:ඛණ්ඩ (intercepts) සොයන්න.

(v) $f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(ලකුණු 10යි)

(ආ) $x = -3$ සහ $x = 0$ සීමාවන් තුළ $y = x^3 + 3x^2$ වක්‍රය සහ x අක්ෂය අතර වර්ගඵලය සොයන්න.

(ලකුණු 05යි)

University of Ruhuna

2016/2017 Academic Year B. A. (General/ Special) Degree 2000 Level
First Semester Examinations – October/November 2017

STS 21523/STS21623 - Intermediate Mathematics

Answer **Four (04) Questions** only. Time: Three (03) hours

Calculators are allowed.

1.

(a) Evaluate each of the following limits, if it exists.

(i) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

(ii) $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

(iii) $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x + 3}{x + 1}$

(iv) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{3x^2 + 2x - 7}$

(v) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3 + 2x + 1}{x - 3}$

(10 marks)

(b) A business manager determines that the total cost of producing x units of a particular commodity may be modeled by the function $C(x) = 75x + 120{,}000$ rupees.

The average cost is $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Find $\lim_{x \to +\infty} A(x)$ and interpret your result.

(5 marks)

2.

(a) Differentiate the given functions with respect to x.

(i) $y = 3x^5 - 4x^3 + 9x - 6$

(ii) $y = (x^2 + 2)(x + \sqrt{x})$

(iii) $y = \dfrac{2x - 1}{1 - x^3}$

(iv) $y = 2u^2 - u + 5$ when $u = 1 - x^2$.

(8 marks)

37

(b) Find an equation for the tangent line to the graph of the function $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6$ at the point $x = 2$.

(3 marks)

(c) An efficiency study of the morning shift at a certain factory indicates that an average worker arriving on the job at 8.00 a.m. will have produced $Q(t) = -t^3 + 8t + 15t$ units t hours later.

(i) Compute a worker's rate of production $R(t) = Q'(t)$.

(ii) At what rate is a worker's rate of production changing with respect to time at 9.00 a.m.?

(4 marks)

3.

(a) Find all vertical and horizontal asymptotes of the graph of $f(x) = \dfrac{x+3}{x-5}$.

(8 marks)

(b) A manufacturer estimates that if x units of a particular commodity are produced, the total cost will be $C(x)$ Rupees, where $C(x) = x^3 - 24x^2 + 350x + 338$. Find the marginal cost $C'(x)$.

(2 marks)

(c) Find $\dfrac{dy}{dx}$ for $5x - x^2y^3 = 2y$ by implicit differentiation.

(5 marks)

4.

(a) Find all values of λ for which $\det(A) = 0$, where $A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{pmatrix}$.

(3 marks)

(b)

(i) Find A^{-1}, where $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 11 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

(5 marks)

(ii) Using part (i), solve the system of equations

$$\begin{aligned} 4x + 5y \quad &= 9 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1. \end{aligned}$$

(4 marks)

(c) A person imports two fruits, apple and peaches. Each of these fruits is delivered to three different outlets. The number of units of fruits i that are delivered to outlet j is represented by a_{ij} in the matrix $A = \begin{pmatrix} 125 & 100 & 75 \\ 100 & 175 & 125 \end{pmatrix}$.

The profit per unit is represented by the matrix $B = (\$3.50 \quad \$6.00)$. Find the product BA and state what each entry of the product represents.

(3 marks)

5.

(a) Evaluate the following indefinite integrals.

(i) $\int (3t^2 - \sqrt{5}\, t + 2)dx$.

(ii) $\int \left(\frac{1}{2y} - \frac{2}{y^2} + \frac{2}{\sqrt{y}} \right) dy$.

(iii) $\int (x^3 - \sqrt{3x} + 5e^{-2x})dx$.

(iv) $\int t(t^2 + 1)^5 dt$.

(8 marks)

(b) A manufacturer estimates that the marginal cost of producing q units of a certain commodity is $C'(q) = 3q^2 - 24q + 48$ rupees per unit. If the cost of producing 10 units is Rs. 5,000, what is the cost of producing 30 units?

(5 marks)

(c) Evaluate the definite integral $\int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$.

(4 marks)

6.

(a) Let $f(x) = x^3 + 3x^2$.

(i) Find $f'(x)$ and determine the intervals of increase and decrease for $f(x)$. Find the local maxima and minima of $f(x)$.

(ii) Find $f''(x)$ and determine the intervals of concavity for $f(x)$. Find the inflection point of $f(x)$.

(iii)Find the limits at infinity.

(iv)Find the x intercepts.

(v) Sketch the graph of $f(x)$.

(10 marks)

(b) Calculate the area between the curve $y = x^3 + 3x^2$ and the x-axis for the limits $x = -3$ and $x = 0$.

(5 marks)

38