රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධිය - පළමු ස්ථලය

(පළමු සමාසික) පරීක්ෂණය - 2015 ජුනි/ජූලි

විෂයය: කර්මාන්ත ගණිතය/ ව්‍යවහාරික ගණිතය

පාඨමාලා ඒකකය: : IMT111β/AMT111β/MAM1133

(පෞරාණික යාන්ත්‍රනය -I) කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (a) ස්කන්ධය m වන අංශුවක් කලය t හිදී එහි පිහිටුම දෛශිකය $\vec{r}(t) = 4\cos\frac{t}{2}\,\underline{\mathrm{i}} + 4\sin\frac{t}{2}\,\underline{\mathrm{j}}$ වන ලෙස ද්විමාන අවකාශයේ චලිතවේ .

(i) $t=\pi$ සහ $t=\dfrac{3\pi}{2}$ විට ප්‍රවේගය සහ ත්වරණය සොයන්න.

(ii) අංශුවෙ පථය සඳහා x සහ y පදවලින් (t ගෙන් ස්වායත්තව)සමීකරණයක් නිර්ණය කර $xy-$ තලයේ දල සටහනකින් දක්වන්න.

(b) කුලෝම් සහ ස්ටෝක්ස් ඝර්ෂණ පරිමන්දන යන්හි (එනම ප්‍රතිරෝධී බල) සංයෝජනයක් මගින් නවතනු පිණිස ස්කන්ධය m වූ කාරයක් තිරිංග යොදනු ලබන්නේ මුලු ප්‍රතිරෝධය $-\mu mg - k\dot{x}$, $\dot{x} > 0$, වන පරිදිය. මෙහි x යනු තිරිංග යොදනු ලැබූ ස්ථානයෙ සිට ඇති දුර වන අතර $\mu > 0$, $k \geq 0$ වේ.

(i) $k=0$ විට (එනම ශුද්ධ කුලෝම් පරිමන්දනය යටතේ) කාලය $t=0$ දී v_0 ප්‍රවේගයයකදී තිරිංග යෙදීමෙන් කාරය $T_s = \dfrac{v_0}{\mu g}$ කාලයකදී නිශ්චලතාවයට පැමිණෙන බව සහ

(ii) එම ආරම්භක ප්‍රවේගය සමගම පූර්ණ පරිමන්දනය යටතේ (එනම $\mu > 0$ සහ $k \neq 0$) නිශ්චලවීමට යන කාලය T යන්න

$$T = \frac{m}{k}\log_e\left(1 + \frac{k}{m}T_s\right).$$

මගින් දෙනුලබන බව පෙන්වන්න.

---

2. a) සුපුරුදු අංකනයෙන්, චලනය වන අංශුවක් සඳහා සිලින්ඩරාකාර ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක වලින් ප්‍රවේග සහ ත්වරණ සංරචක

(i) $\underline{\mathbf{v}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\underline{\theta}} + \dot{z}\hat{z}$

(ii) $\underline{\mathbf{a}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\underline{\theta}} + \ddot{z}\hat{z}$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

b) සිලින්ඩරාකාර ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක අනුබද්ධයෙන් $r^2 + z^2 = a^2$ මගින් දෙනුලබන අරය a වන සුමට කුහර ගෝලයක අන්තර් පෘෂ්ඨය ඔස්සේ $z = -a/2$ ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුවක් v_0 ප්‍රවේගයෙන් තිරස්ව ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ.

(i) චලිතය සඳහා නිව්ටන්ගේ දෙවන නියමය යොදාගනිමින් $r^2\dot{\theta} = h$ බව පෙන්වන්න. මෙහි h යනු නියතයකි.

(ii) පද්ධතියට ශක්ති සංස්ථිතිය යෙදීමෙන්

$$\frac{m}{2}\left(\frac{a^2\dot{z}^2}{a^2 - z^2} + \frac{h^2}{a^2 - z^2}\right) + mgz = \text{නියතයක්}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) අනුයාත චලිතයේදී අංශුව ලඟාවන උපරිම සහ අවම උස සෙවීම සඳහා සුදුසු z හි සමීකරණයක් ලබාගන්න.

---

3. a) පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $r_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ වන ස්කන්ධයන් $m_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ වූ පද්ධතියක් සලකන්න.

(i) පද්ධතියේ මූලය වටා මුලු කෝණික ගම්‍යතාව $\underline{\mathbf{H}}_0$ සහ මුලු චාලක ශක්තිය T අර්ථ දක්වන්න.

(ii) සුපුරුදු අංකනයෙන් $\dfrac{d\underline{\mathbf{H}}_0}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \underline{\mathbf{r}}_i \wedge \underline{\mathbf{F}}_i$ බව සහ $T = T_G + \dfrac{1}{2}MV_G^2$ බව පෙන්වන්න.

b) දෘඩ වස්තුවක් අචල අක්ෂයක් වටා $\underline{\omega}$ කෝණික ප්‍රවේගයෙන් භ්‍රමණය වේ නමද එහි අචල අක්ෂය වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය I ද නම්, භ්‍රමණයෙහි කෝණික ගම්‍යතාව සහ චාලක ශක්තිය සඳහා ප්‍රකාශන ලියා දක්වන්න.

c) (i) අරය a සහ විභ්‍රමන අරය K වන සිලින්ඩරයක් කෝණය α සහ දිග l වූ ආනත තලයක් මත එහි මුදුනින් පටන්ගනිමින් ලිස්සීමකින් තොරව පහලට පෙරළේ. එය ආනත තලයේ පතුලට ලඟාවනවිට වේගය v_1 යන්න $\sqrt{\dfrac{2gla^2\sin\alpha}{(a^2 + K^2)}}$ වන බව පෙන්වන්න.

(ii) ඉහත c(i) කොටසෙහි පද්ධතියම, එහි සිලින්ඩරය, එම අරය සහ ස්කන්ධය ඇති කුහර සිලින්ඩරයක් මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කරමින් සලකන්න. ආනත තලයේ පතුලෙහිදී වේගය v_2 යන්න $v_1 : v_2 = 2 : \sqrt{3}$ සම්බන්ධය ගන්නාබව අපෝහණය කරන්න.

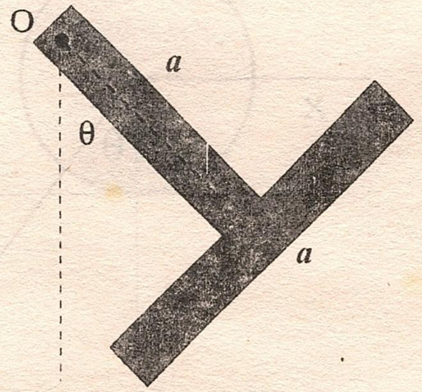
---

4. a) දිග a සහ ස්කන්ධය m වූ දණ්ඩක් සලකන්න.

(i) දණ්ඩේ එක් කෙලවරක් හරහා යන දණ්ඩට ලම්බක අක්ෂයක් වටා දණ්ඩේ අවස්ථිතිි සූර්ණය $\frac{ma^2}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) සමාන්තර අක්ෂ ප්‍රමේයය භාවිතා කරමින් දණ්ඩේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය (ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය) හරහා යන දණ්ඩට ලම්බක අක්ෂයක් වටා දණ්ඩේ අවස්ථිති සූර්ණය $\frac{ma^2}{12}$ බව පෙන්වන්

b) එක එකක් දිග a සහ ස්කන්ධය m වූ දඬු දෙකක් $T-$ කොටුවක් සෑදෙන සේ සෘජු කෝණිව සම්බන්ධ කර ඇත. ඉන්පසු, මෙම $T-$ කොටුව රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි O වටා එහි සිරස් තලයේ නිදහසේ භ්‍රමණය වන්නට ඇණයකින් එල්ලා ඇත.



(i) O වටා $T-$ කොටුවේ අවස්තිති සූර්ණය $\frac{17ma^2}{12}$ බව පෙන්වන්න (සමාන්තර අක්ෂ ප්‍රමේයය ඔබට භාවිතාකල හැක).

(ii) $T-$කොටුවෙහි කුඩා දෝලනයන්හි කලාවර්තය සොයන්න.

---

5. a) එක් ලක්ෂ්‍යයක් අචල වූ දෘඩ වස්තුවක චලිතය සඳහා ඔයිලර්ගේ සමීකරණ සුපුරුදු අංකනයෙ ලබාගන්න.

b) $I_1 = I_2$ සහ $I_1 < I_3$ වන පරිදි වූ ප්‍රධාන අවස්ථිති ගූර්ණ සහිත බමරයක චලිතය (එනම් එක් ලක්ෂ්‍යයක් අචල වූ දෘඩ වස්තුවක චලිතය) සලකන්න.

(i) එක් ලක්ෂ්‍යයක් අචලවූ ව්‍යාවර්තය රහිත චලිතය සඳහා ඔයිලර්ගේ සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

(ii) ආරම්භක කෝණික ප්‍රවේගය $\underline{\omega_0} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ නම් පද්ධතිය ඕනෑම කලයකදී කෝණික ප්‍රවේගය $\underline{\omega}$ සඳහා විසඳන්න.

---

6. a) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ගතිමය පද්ධතියක් සඳහා ලග්රාන්ජ් සමීකරණ

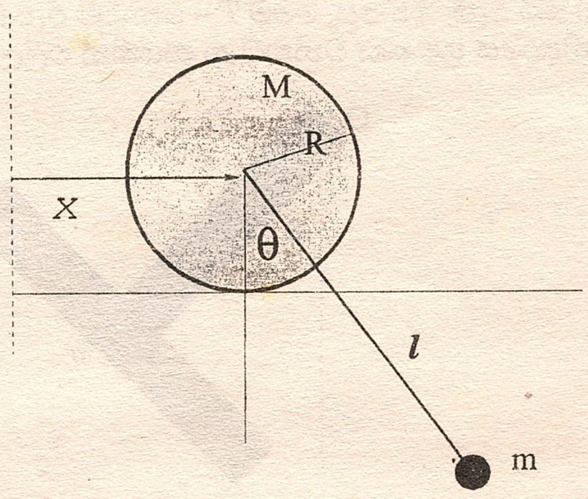
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \qquad j = 1, 2, ..., n$$

මගින් දෙනු ලබයි. පරිකල්‍ය, සංස්තිථික ගතිමය පද්ධතියක් සඳහා ලග්රාන්ජ් සමීකරණ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; \qquad j = 1, 2, ..., n$$

ආකාරයට ඌණනය කරන්න.

b) අරය R සහ ස්කන්ධය M වූ ඒකාකාර වෘත්තාකර තැටියකට තිරස් තල පෘෂ්ඨයක් මත ලිස්සීමකින් තොරව චලනය වීමට නිදහස ඇත. රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි තැටියේ අක්ෂයට සම්බන්ධිත ඝර්ෂණය රහිත විවර්තනියකින් අවලම්බයක් එල්ලා ඇත. කෙලවර m ලක්ෂ්‍යයීය ස්කන්ධයක් සහිත දිග l වූ සැහැල්ලු දණ්ඩකින් අවලම්බය සමන්විතවේ.



(i) රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි x සහ θ සාධාරිත ඛණ්ඩාංක සලකමින් ලග්රාන්ජ් ශ්‍රිතය L,

$$L = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + mgl\cos\theta$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ii) චලිත සමීකරණ ලබාගැනීමට ලග්රාන්ජ් සමීකර භාවිතා කරන්න.

c) $M = m$ සහ කුඩා θ සමග ඉහත (b) කොටසෙහි දී ඇති පද්ධතිය සලකන්න.

(i) P_θ සහ P_x සාධාරිත ගම්‍යතා සඳහා ප්‍රකාශන ලබාගන්න.

(ii) සාධාරිත ඛණ්ඩාංක θ සහ x සහ සාධාරිත ගම්‍යතා P_θ සහ P_x පදවලින් H හැමිල්ටෝනියානු ශ්‍රිතය ඔබ ලබාගන්නා ආකාරය පැහැදිළි කරන්න (ප්‍රකාශනය සුලුකිරීම අවශ්‍ය නැත).