රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි

දෙවන ස්ථලය (පළමු සමාසික) පරීක්ෂණය

2015 ජූනි

විෂයය: ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: MAT212β/MPM2123 (තාත්ත්වික විශ්ලේෂණය I)
කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න **04 කට පමණක්** පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. a) අපරිමිත ශ්‍රේණි සඳහා වූ සංසන්දන පරීක්ෂාව (පළමු ආකාරය) ප්‍රකාශ කරන්න. එනයින්

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී හෝ අපසාරී වන්නේදැයි නිර්ණය කරන්න.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n2^n-1}$ ශ්‍රේණිය අපසාරී වන බව පෙන්වන්න.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ හා $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ට ධන පද තිබේ යැයි හා $n \to \infty$ විට $\dfrac{a_n}{b_n} \to l$ යැයි ගනිමු. මෙහි $l \neq 0$ පරිමිත වේ.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ අභිසාරී නම් $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ අභිසාරී වන බව

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ අපසාරී නම් $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ අපසාරී වන බව

පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n^3+1)^{\frac{1}{3}} - n\right]$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී හෝ අපසාරී වන්නේ දැයි නිර්ණය කිරීමට ඉහත පරීක්ෂාව භාවිතා කරන්න.

---

2. a) ධන පද සහිත $1+r+r^2+\ldots$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේණිය $r<1$ නම් අභිසාරී වන බවත්, $r \geq 1$ නම් අපසාරී වන බවත් පෙන්වන්න.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ශ්‍රේණිය $p>1$ නම් අභිසාරී හා $p \leq 1$ නම් අපසාරී බව පෙන්වීමට කෝෂී අනුකල පරීක්ෂාව භාවිතා කරන්න.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^5} + 1.5^n\right)$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

සම්බන්ධිතයි.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n n!}{n^n}$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වීමට k හි කුමන ධන අගයන් සඳහා අනුපාත පරීක්ෂාව යොදා ගත හැකිද ? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

---

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ යනු $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^p}$ වන පරිදි වූ ධන පද ශ්‍රේණියක් යැයි ගනිමු. මෙහි $\alpha > 0,\ p > 1$ සහ $\{\gamma_n\}$ යනු පර්යන්තගත අනුක්‍රමයක් වේ.

a) β කුමක් වුවත් $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ශ්‍රේණිය $\alpha > 1$ විට අභිසාරී වන බවත් , $\alpha < 1$ විට අපසාරී වන බවත් ,

b) $\alpha = 1$ සඳහා $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ශ්‍රේණිය $\beta > 1$ විට අභිසාරී වන බවත්, $\beta < 1$ විට අපසාරී වන බවත්,

පෙන්වන්න.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^{2n+1}}{(2n)!},\quad x > 0$ ශ්‍රේණියේ අභිසාරීතාවය සාකච්ඡා කරන්න.

---

4. a) දී ඇති $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ශ්‍රේණියක නිරපේක්ෂ අභිසාරීතාවය හා අසමභාව්‍ය අභිසාරීතාවය අර්ථ දක්වන්න.
පහත දැක්වෙන ශ්‍රේණි නිරපේක්ෂ ලෙස අභිසාරී අසමභාව්‍ය ලෙස අභිසාරී හෝ අපසාරී වන්නේදැයි නිර්ණය කරන්න.

(i) $\frac{(-1)^n}{n^4+7}$

(ii) $\frac{(-1)^n}{2n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(3 - \frac{1}{n}\right)$ ශ්‍රේණියෙහි අභිසාරී හෝ අපසාරී බව තීරණය කිරීමට ඒකාන්තර ශ්‍රේණි පරීක්ෂාව(alternating series test) භාවිතා කල නොහැක්කේ ඇයි දැයි පැහැදිලි කරන්න.

c) ආබෙල්ගේ පරීක්ෂාව ප්‍රකාශ කරන්න.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ ශ්‍රේණියේ අභිසාරීතාවය සත්‍යාපනය කිරීමට ආබෙල් පරීක්ෂාව භාවිතා කරන්න.

සම්බන්ධිතයි.

5. a) f යනු $[a,b]$ මත පර්යන්තගත ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්

(i) $L(P,f) \leq U(P,f)$;

(ii) $\underline{\int_a^b} f dx \leq \overline{\int_a^b} f dx$

බව සාධනය කරන්න.

[$L(P,f) \leq U(P^* f)$ බව උපකල්පනය කරන්න. මෙහි P^* යනු $[a,b]$ හි P බෙදුමෙ විශෝධනයකි.]

b) $f(x) = x,\ x \in [0,1]$ ලෙස ගනිමු. $P_n = \left\{[0,\frac{1}{n}],[\frac{1}{n},\frac{2}{n}],\cdots,[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],\cdots,[1-\frac{1}{n},1]\right\}$ යනු $[0,1]$ හි සම්මත බෙදුම වේ. a)(ii) කොටස භාවිතයෙන් f අනුකල්‍ය වන බව සහ $\int_0^1 f dx = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

c) $f(x)$, [0,1] මත පහත පරිදි අර්ථ දක්වා ඇත්තේ යැයි ගනිමු.

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} & ; \quad x \text{ පරිමේය වේ} \\ 1-x & ; \quad x \text{ අපරිමේය වේ} \end{cases}$$

f ශ්‍රිතය සඳහා උඩත් රීමාන් අනුකලය සහ යටත් රීමාන් අනුකලය සොයන්න. f, $[0,1]$ මත රීමාන් අනුකල්‍ය වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

---

6. a) f යනු $[a,b]$ මත පර්යන්තගත ශ්‍රිතයක්ද P සහ P^* යනු $[a,b]$ හි බෙදුම් ලෙසද ගනිමු. P^* යනු P හි විශෝධනයකි. සුපුරුදු අංකනයෙන් $L(P,f) \leq L(P^*,f)$ බව සාධනය කරන්න.

$U(P,f)$ සහ $U(P^*,f)$ අතර සම්බන්ධතාවය කුමක්ද?

b) (i) f යනු $[a,b]$ මත පර්යන්තගත ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, සියලු $\varepsilon > 0$ සඳහා $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ වන පරිදි $[a,b]$ හි P බෙදුමක් පවතී නම් හා නමම පමණක් f, $[a,b]$ මත රීමාන් අනුකල්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

(ii) $f : [3,6] \to \mathbb{R}$ යනු

$$f(x) = \begin{cases} 2\,; & 3 \leq x < 4 \\ 1\,; & x = 4 \\ 4\,; & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

වන පරිදි වූ ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු.

$P_k = \{3, 4-k, 4+k, 6\}$ බෙදුම සඳහා [3,6] මත f හි අනුකල්‍යතාවය නිර්ණය කිරීමට b)(i) කොටසෙහි රීමාන් අවශ්‍යතාවය භාවිතා කරන්න.

මෙහි $0 < k < 1$ වේ.

අවසාන පිටුව.