රුහුණු විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි

තෙවන ස්ථලය (පළමු සමාසික) පරීක්ෂණය

2015 ජූනි

විෂයය: ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: MAT311β/MPM3113 (සමූහ වාදය)
කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්ණ **04 කට පමණක්** පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. a) $G = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid p, q, r \in \mathbb{R},\ pr \neq 0 \right\}$ න්‍යාස ගුණනය යටතේ සමූහයක් සාදන බව පෙන්වන්න.

b) G සමූහයේ H නොහිස් කුලකයක් G හි ප්‍රමත උප සමූහයක් වන්නේ සියලු $x, y \in H$ සහ $g \in G$ සඳහා $(gx)(gy)^{-1} \in H$ නම් සහ නමම පමණක් බව සාධනය කරන්න.

c) ඉහත b) කොටස භාවිතයෙන් $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$ යන්න G හි ප්‍රමත උප සමූහයක් වන බව පෙන්වන්න.

---

2. a) $G = < a >$ යනු ගණය n වූ චක්‍රීය සමූහයක් යැයි ගනිමු. $G = < a^m >$ වන්නේ $\gcd(m, n) = 1$ නම් සහ නමම පමණක් බව පෙන්වන්න.

b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}_2,\ b \in \mathbb{Z}_3\}$ කුලකය සලකන්න.

(i) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ හි අවයව ලියා දක්වන්න.

(ii) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ යන්න සියලු $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ සඳහා $(a, b) \oplus (c, d) = (a \oplus_2 c\ ,\ b \oplus_3 d)$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති $\oplus$ කර්මය යටතේ සමූහයක් සාදන බව පෙන්වන්න.

(iii) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ යන්න ආබෙලියානු සමූහයක් සාදයිද? ඔබෙ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(iv) $G =< (1, 1) >$ බව පෙන්වන්න..

(v) a) කොටස භාවිතයෙන් $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ චක්‍රීය සමූහයෙහි අනෙකුත් ජනකයන් සොයන්න.

---

3. a) $\alpha = (6217)(2413)$ යනු $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ කුලකය මත අර්ථ දක්වා ඇති සංකරණයක් යැයි ගනිමු.

(i) α යන්න වියුක්ත චක්‍රයන්ගේ ගුණිතයක් ලෙස සහ transpositions වල ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) α ඔත්තේ සංකරණයක් වේද? ඔබෙ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

b) $p = (135),\ q = (241)$ සහ $r = (2354)$ යනු $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ කුලකය මත අර්ථ දක්වා ඇති සංකරණයන් යැයි ගනිමු. $\tau = p^2 q^{-1} r$ සහ $o(\tau)$ සොයන්න.

සම්බන්ධිතයි.

c) H සහ K යනු G සමූහයේ උප සමූහ දෙකක් යැයි ගනිමු.

(i) $H \cap K$ යනු G හි උප සමූහයක් බව;

(ii) H සහ K දෙකම G තුල ප්‍රමත වන්නේ නම $H \cap K$ යන්න G තුල ප්‍රමත වන බව

පෙන්වන්න

---

4. a) a සහ b යනු G සමූහයක අභිමත ප්‍රභින්න අවයව දෙකක් සහ H යනු, G හි උප සමූහයක් යැයි ගනිමු.

(i) $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$;

(ii) $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$

බව පෙන්වන්න.

b) උප සමූහයක ඕනෑම දකුණත් (වමත්) සහකුලක දෙකක් වියුක්ත හෝ සර්වසම වන බව පෙන්වන්න.

c) $x \in G$ සියලුම අවයව සඳහා $xH = Hx$ වන්නේ නම් G සමූහයේ H උප සමූහයකට ප්‍රමත උප සමූහයක් යැයි කියනු ලැබේ.
$H = \{0, 2, 4\}$ යනු $G = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \oplus_6)$ සමූහයේ උප සමූහයක් යැයි ගනිමු.

(i) G තුල H හි සියලුම වමත් සහ දකුණත් සහකුලක ලැයිස්තු ගත කරන්න.

(ii) එනයින් H යන්න G තුල ප්‍රමත වන්නේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

---

5. a) G සහ G' යනු සමූහ දෙකක් සහ $f : G \to G'$ යනු සරූපතාවයක් යැයි ගනිමු. f හි මදය (Ker$f$) අර්ථ දක්වන්න.

(i) Kerf, G හි ප්‍රමත උප සමූහයක් වන බව;

(ii) f එකට - එක වන්නේ Ker $f = \{e\}$ නම් සහ නමම පමණක් බව

සාධනය කරන්න. මෙහි e යනු G හි සර්වසාම්‍යය වේ.

b) $(G, *)$ සහ $(G', \circ)$ යනු සමූහ දෙකක් යැයි ගනිමු. $f : G \to G'$ සමරූපතාවයක් වේ යන්නෙන් අදහස් කරන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.
$(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ සහ $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ යනු සමූහ දෙකකි. සියලුම $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ සඳහා '$*$' කර්මය $a*b = a+b+ab$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති අතර '.' යනු සාමාන්‍ය ගුණනයයි.

(i) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ සඳහා සුදුසු අනුරූපනයක් අර්ථ දක්වන්න.
එනයින් $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .) \cong (\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) f හි මදය (Ker$f$) සොයන්න.

සම්බන්ධිතයි.

6. පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශ සත්‍ය නම් සාධනය කරන්න. අසත්‍ය නම් උදාහරණයකින් පැහැදිලි කරන්න.

a) H සහ K යනු G සමූහයක උප සමූහ දෙකක් වේ. $HK = KH$ වේ නම් HK යන්න G හි උප සමූහයක් වේ.

b) H යනු $H^{-1} = H$ වන පරිදි වූ G සමූහයක නොහිස් උප කුලකයකි. මෙහි $H^{-1} = \{h^{-1} : h \in H\}$ වේ. එවිට H යනු G හි උප සමූහයක් වේ.

c) a යනු G චක්‍රීය සමූහයක ජනකයක් නම් a^{-1} ද ජනකයක් වේ.

d) $(\mathbb{Q}, +) \cong (\mathbb{Q}^*, .)$ වේ. මෙහි $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ වේ.

e) G' යනු G සමූහයේ න්‍යාදේශ්‍ය උප සමූහයක් යැයි ගනිමු. එවිට G' යන්න G තුල ප්‍රමත වේ.

අවසාන පිටුව.