රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යාවේදී උපාධි (තෙවන ස්ථල) පළමු සමාසික පරීක්ෂණය -ජූනි/ජූලි 2015

විෂයය : ගණිතය

පාඨමාලා ඒකකය : MAT313β/MMS3113 (ගණිතමය සංඛ්‍යානය-II)

කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න <u>04 කට පමණක්</u> පිළිතුරු සපයන්න

---

1. $\hat{\theta}$ යනු θ පරාමිතිය සඳහා වූ ලක්ෂ්‍යීය නිමාණකයකි.
$\hat{\theta}$, θ සඳහා අනභිනත නිමාණකයක් වේ, යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි පැහැදිලි කරන්න.

(අ) $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ යනු මධ්‍යන්‍යය μ හා විචලතාව σ^2 වූ සංගහනයකින් ලබාගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියකි.

(i) $\bar{Y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$, μ සඳහා අනභිනත නිමාණකයක් බව හා $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{(n-1)}$, σ^2 සඳහා අනභිනත නිමාණකයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) $T = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$ වේ. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ වේ නම්, T, μ සඳහා අනභිනත නිමාණකයක් බව පෙන්වන්න. මෙහි $a_1, a_2, ..., a_n$ නියත වේ.

(ආ) $X_1, X_2, ..., X_n$ යනු මධ්‍යන්‍යය μ හා විචලතාව σ_1^2 වූ සංගහනයකින් ලබාගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියක් වන අතර $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ යනු මධ්‍යන්‍යය μ හා විචලතාව σ_2^2 වූ සංගහනයකින් ලබාගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියකි. නියැදි දෙක ස්වායත්ත නම්,

(i) $\omega\bar{X} + (1-\omega)\bar{Y}$ යන්න μ සඳහා අනභිනත නිමාණකයක් බව පෙන්වන්න ;

මෙහි $0 \le \omega \le 1$, $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ හා $\bar{Y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ වේ.

(ii) $\omega = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ විට මෙම නිමාණකයේ විචලතාව අවම වන බව පෙන්වන්න.
අවම විචලතාවයේ අගය සොයන්න.

සම්බන්ධිතයි.

2. (අ) $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ යනු සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය,

$$f_Y(y,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} - \frac{2y}{\theta^2} & , 0 < y < \theta \text{ විට ,} \\ 0 & , \text{නැතහොත්} \end{cases}$$

වන සංගහනයකින් ගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියකි.

(i) $E(Y)$

(ii) θ සඳහා සූර්ණ නිමාණකය

සොයන්න.

(ආ) උපරිම භව්‍යතා නිමාණක ක්‍රමය පැහැදිලි කරන්න.

(i) $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ යනු සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය,

$$f_Y(y,\alpha) = \begin{cases} 2\alpha y e^{-\alpha y^2} & , y > 0, \alpha > 0 \text{ විට ,} \\ 0 & , \text{නැතහොත්} \end{cases}$$

වන සංගහනයකින් ගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියකි.
α සඳහා උපරිම භව්‍යතා නිමාණකය සොයන්න.

(ii) $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ යනු සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය, $Pr(Y = y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$, y=0,1,2,......
ලෙස වන පොයිසෝන් ව්‍යාප්තියකින් ලබාගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියකි.
λ සඳහා උපරිම භව්‍යතා නිමාණකය සොයන්න.

---

3. (අ) පරාමිතික ලක්ෂ්‍ය නිමාණයේදී භාවිතා වන θ පරාමිතිය සඳහා වූ $\hat{\theta}_n$ නිමාණකයෙහි, සංගත ලක්ෂණය අර්ථ දක්වන්න.

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ යනු සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය,

$$f_Y(y,\theta) = \begin{cases} \theta y^{\theta-1} & , \text{if } 0 < y < 1, \quad \theta > 0, \\ 0 & , \text{නැතහොත්} \end{cases}$$

වන ව්‍යාප්තියකින් ගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියකි.

$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ යන්න $\frac{\theta}{\theta+1}$ සඳහා සංගත නිමාණකයක් බව පෙන්වන්න.

(ආ) θ පරාමිතියෙහි ශ්‍රිතයක් වන $\tau(\theta)$ හි අනභිනත නිමාණකයක විචලතාව සඳහා ක්‍රාමර්-රාඕ අසමානතාව, සුපුරුදු අංකනයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.
මෙහි සමානතාවය පවතින්නේ කවර අවස්ථාවේදීද?

$Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$ යනු දන්නා මධ්‍යන්‍යය μ හා නොදන්නා විචලතාව σ^2 වූ ප්‍රමථ ව්‍යාප්තියකින් ලබාගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියකි.

$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu)^2}{n}$ වේ.

T, σ^2 සඳහා අවම විචලතා අනභිනත නිමාණකයක් බව පෙන්වන්න.
T හි විචලතාවය සඳහා ක්‍රාමර්-රාඕ යටත් පර්යන්තය ලබාගන්න.

සම්බන්ධිතයි.

4. (අ) ප්‍රමාණවත් සංඛ්‍යාතියක් සඳහා නේමාස් සාධකන ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
$Y_1, Y_2, ..., Y_n$ යනු සම්භාවිතා සනත්ව ශ්‍රිතය, $f_Y(y,\theta) = a(\theta)b(y)exp^{[c(\theta)d(y)]}$ වන සංගහනයකින් ගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියකි.

$\sum_{i=1}^{n} d(Y_i)$, යන්න θ පරාමිතිය සඳහා ප්‍රමාණවත් සංඛ්‍යාතියක් බව පෙන්වන්න.

(ආ) $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ යනු සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය, $Pr(Y=y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$, y=0,1,2,......
ලෙස වන පොයිසෝන් ව්‍යාප්තියකින් ලබාගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියකි ; මෙහි λ නොදන්නා පරාමිතියකි.

(i) $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ යන්න λ සඳහා ප්‍රමාණවත් සංඛ්‍යාතියක් බව,

(ii) $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ යන්න λ සඳහා අනභිනත නිමාණකයක් බව හා,

(iii) $\bar{Y}$, λ සඳහා අවම විචලතා අනභිනත නිමාණකය බව

පෙන්වන්න.
ඔබ භාවිතා කල ප්‍රමේයය සුපුරුදු අංකනයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

---

5. $X_1, X_2, ..., X_{n_1}$ යනු නොදන්නා මධ්‍යනායය μ_1 හා නොදන්නා විචලතාව σ^2 වූ ප්‍රමථ ව්‍යාප්තියකින් ලබාගත් තරම n_1 වූ සසම්භාවී නියැදියකි. $Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2}$ යනු නොදන්නා මධ්‍යනායය μ_2 හා නොදන්නා විචලතාව σ^2 ම වූ ප්‍රමථ ව්‍යාප්තියකින් ලබාගත් තරම n_2 වූ සසම්භාවී නියැදියකි. නියැදි දෙක ස්වායත්ත බව හා නියැදි තරම කුඩා බව උපකල්පනය කර, $(\mu_1 - \mu_2)$ සඳහා $100(1-\alpha)\%$ විශ්‍රම්භ ප්‍රාන්තරය ගොඩනගන අයුරු පැහැදිලි කරන්න.

'රඹුටන්' වගාව සඳහා යොදන පොහොර වර්ග දෙකක් සැසඳීමට අවශ්‍යව ඇත. වගාවේ සමහර පැලවලට A පොහොර වර්ගයද, ඉතිරි ඒවාට B පොහොර වර්ගයද, යොදන ලදී. A පොහොර වර්ගය යෙදූ පැල අතුරින් පැල 5 කින් යුත් සසම්භාවී නියැදියක්ද, B පොහොර වර්ගය යෙදූ පැල අතුරින් පැල 5 කින් යුත් සසම්භාවී නියැදියක්ද, වගාවෙන් තෝරා ගෙන අස්වැන්න පහත සඳහන් පරිදි සටහන් කරගන්නා ලදී.

A පොහොර වර්ගය යෙදූ පැල වලින් ලද ගෙඩි ගණන	850	833	848	796	803
B පොහොර වර්ගය යෙදූ පැල වලින් ලද ගෙඩි ගණන	771	789	792	827	786

A පොහොර වර්ගය හා B පොහොර වර්ගය යෙදූ පැල වලින් ලද මධ්‍යනායය ගෙඩි ගණනෙහි වෙනස සඳහා 95% විශ්‍රම්භ ප්‍රාන්තරය ගොඩනගන්න.
ඔබේ උපකල්පන පැහැදිලිව සඳහන් කරන්න.

6. (අ) සංඛ්‍යාන කල්පිත පරීක්ෂාවේදී භාවිතා වන පහත දැක්වෙන පද පැහැදිලි කරන්න.

(i) පළමු ප්‍රරූප දෝෂය

(ii) දෙවන ප්‍රරූප දෝෂය

(iii) බල ශ්‍රිතය

(ආ) Y යනු සම්භාවිතා සනත්ව ශ්‍රිතය,

$$f_Y(y,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{\frac{-y}{\theta}} & , y > 0, \quad \theta > 0 \text{ විට} , \\ 0 & , \text{නැතහොත්} \end{cases}$$

වූ ව්‍යාප්තියක සසම්භාවී විචල්‍යයකි.

$H_1 : \theta \neq 10$, යන වෛකල්පිත කල්පිතයට එරෙහිව $H_0 : \theta = 10$, යන අප්‍රතිෂ්ඨෙය කල්පිතය පරීක්ෂා කිරීම සඳහා මෙම ව්‍යාප්තියෙන් ගත් නිරීක්ෂණයක් භාවිතා කරනු ලැබේ. නිරීක්ෂිත අගය 8 ට අඩු නම් හා 12 ට වැඩි නම් අප්‍රතිෂ්ඨෙය කල්පිතය ප්‍රතික්ෂේප කරන්නේ නම්, පළමු ප්‍රරූප දෝෂයේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

තවද, $\theta = 12$, නම්, දෙවන ප්‍රරූප දෝෂයේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
පරීක්ෂාවේ බල ශ්‍රිතය ලබාගන්න.
