රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි දෙවන ස්ථල
(පළමු සමාසික) පරීක්ෂණය 2015 ජූනි/ජූලි

විෂයය: ව්‍යවහාරික ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: AMT212β/MAM2123
ආකලනමය ගණිතය **කාලය:** පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්ණ හතරකට (04) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

1. $f(x) = 0$ නිරේඛජ සමීකරණය සලකන්න.

   a) (i) සමීකරණයෙහි මූලයක් සෙවීමට සමච්ඡේද ක්‍රමය යෙදීමට f සඳහා අනිවාර්ය හා ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාවයන් ලියා දක්වන්න.

   (ii) $\sin x + 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල සෙවීමට සමච්ඡේද ක්‍රමය යොදාගත හැකිද ? ඔබගේ පිළිතුර තහවුරු කරන්න.

   b) $f(x) = 0$ නිරේඛජ සමීකරණයෙහි $[a, b]$ ප්‍රාන්තරය තුල මූලයක් සෙවීමට සමච්ඡේද ක්‍රමයෙහි ඇල්ගොරිතමය පැහැදිලිව ලියා දක්වන්න.

   c) (i) සමච්ඡේද ක්‍රමයෙහි n වෙනි පුනඃකරණ පියවරේදී දෝෂ පර්යන්තය සඳහා සූත්‍රයක් ව්‍යුත්පන්නය කරන්න.

   (ii) $[1, 2]$ ප්‍රාන්තරය තුල $x^3 - x - 3 = 0$ සමීකරණය 10^{-5} නිරවද්‍යතාව සමග විසඳීමට පුනඃකරණ කොපමණ ප්‍රමාණයක් අවශ්‍යවේද ?

---

2. a) නිරේඛජ සමීකරයක x^* මූලය සඳහා සන්නිකර්ෂණයක් ලබා ගැනීමට ව්‍යුත්පන්න කර ඇති $x_k, k = 0, 1, \ldots$ අනුක්‍රමයෙහි අභිසාරිතාවයෙහි ඝණය α යන්න අර්ථ දක්වන්න.

   b) (i) $f(x) = 0$ නිරේඛජ සමීකරණයෙහි ආසන්න මූලයක් සෙවීමට නිව්ටන් රැප්සන් ක්‍රමය (නිව්ටන් ක්‍රමය) ලියා දක්වන්න.

   (ii) $x^k e^x = 0$ හි විසඳුම සඳහා නිව්ටන් රැප්සන් ක්‍රමය

   $$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n - x_n^2}{k + x_n} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. $x_0 = 1$ සමග ආරම්භ කරමින් $k = 2$ විට x_2 අගයන්න.

   c) $x^3 - 2 = 0$ ඝණජ සමීකරණය $x = g(x)$ ආකාරයෙන් ක්‍රම දෙකකට ලිවිය හැක, නාමිකව

   $$x_{n+1} = g_1(x_n) = x_n^3 + x_n - 2$$
   $$x_{n+1} = g_2(x_n) = \frac{2 + 5x_n - x_n^3}{5}, \quad n \geq 0.$$

   කවර පුනඃකරණ ක්‍රමයක් $2^{\frac{1}{3}}$ විසඳුමට අභිසාරී වේද ? එයට හේතුව කුමක්ද ? $x_0 = 1.2$ භාවිතා කරමින් x_1 ගනණය කිරීමට අභිසාරී අනුක්‍රමය යොදා ගන්න.

සම්බන්ධිතයි.

3. a) f ශ්‍රිතයක් සඳහා අභිප භාජිත අන්තරයන් පහත වගුව මගින් දී ඇත.

$x_0 = 0.0$	$f[x_0] = ?$		
		$f[x_0, x_1] = ?$	
$x_1 = 0.4$	$f[x_1] = ?$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{50}{7}$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

(i) වගුවෙහි ඇතුළත්ව නැති ඒවා නිර්ණය කරන්න.

(ii) ඉහත දත්ත සඳහා නිව්ටන්ගේ අභිප භාජිත අන්තර සූත්‍රය භාවිතා කරමින් $P_2(x)$ අන්තර්නිවේශන බහුපදය සොයන්න.

b) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ යනු $x_0 = a$ සහ $x_n = b$ වන $[a, b]$ තුල ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය $n+1$ සංඛ්‍යාවක් යැයිද $f \in C^{(n+1)}[a, b]$ යැයිද ගනිමු. $P(x)$ යනු $P(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \ldots, n$ වන පරිදි ලක්ෂ්‍යයන් අන්තර්නිවේශනය කරන ලග්‍රාන්ජ් බහුපදය යැයි ගනිමු.

(i) $P(x)$ සහ එහි දෝෂ සූත්‍ර සඳහා ප්‍රකාශන ලියා දක්වන්න.

(ii) $n = 3$ අවස්ථාව සහ

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	2	0

යන දත්ත සලකන්න. ලග්‍රාන්ජ් අන්තර්නිවේශන බහුපදය $P(x)$ ලබාගන්න. ඔබේ පිළිතුර සුලුකරන්න.

---

4. a) f ශ්‍රිතයක් සඳහා $[1, 3]$ මත S free cubic spline අන්තර්නිවේශන බහුපදය

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2(x-1) - (x-1)^3 & 1 \le x < 2 \\ S_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

මගින් අර්ථ දක්වා ඇත. a, b, c සහ සොයන්න.

b) (i) (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ දත්ත කුලකය සඳහා රේඛීය ආකෘතිය e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ දෝෂය සමග $y_i = a_0 + a_1 x_i + e_i$ මගින් දෙනු ලබයි. අඩුතම වර්ග ක්‍රමය භාවිතා කරමින් a_0 සහ a_1 සඳහා පහත දී ඇති නිමාණක ලබාගන්න.

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}, \qquad \hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x},$$

මෙහි $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ සහ $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ වේ.

(ii) .

x_i	-3	-2	0	1
y_i	9	6	2	1

දත්ත කුලකය සලකන්න. අඩුතම වර්ග ක්‍රමය භාවිතා කරමින් මෙම දත්ත සඳහා සුදුසුම රේඛීය සන්නිකර්ෂණය $y = -2x + 2.5$ බව පෙන්වන්න.
