රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යාවේදී උපාධි (තෙවන ස්ථර) පළමු සමාසික පරීක්ෂණය -ජූනි/ජූලි 2015

විෂයය : ව්‍යවහාරික ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය : AMT311β/ MAM3113 (සංඛ්‍යාත්මක විශ්ලේෂණය)

කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

විශ්ව විද්‍යාලය මගින් සපයන ලද ගණක යන්ත්‍ර පමණක් භාවිතයට ඉඩ දෙනු ලැබේ.

---

1. (අ) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ගණය n වූ A න්‍යාසයක් සඳහා න්‍යාස ප්‍රතිමාන $\| A \|_1$, $\| A \|_2$ හා $\| A \|_\infty$ අර්ථ දක්වන්න.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

න්‍යාසය සඳහා $\| A \|_1$ හා $\| A \|_\infty$ සොයන්න.

(ආ) ගවුස් ඉවත්කිරීමේ ක්‍රමය භාවිතා කර $(1,4), (2,7)$ හා $(3,14)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන $y = Ax^2 + Bx + C$ පරාවලයේ A, B හා C සොයන්න.

(ඇ) ඩූලිට්ල් ක්‍රමය යොදාගෙන පහත දී ඇති ඒකජ සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

---

2. (අ) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ හා $b \in \mathbb{R}^n$ ලෙස වූ $Ax = b$ ඒකජ සමීකරණ පද්ධතියට $x = Tx + c$ ආකාරයේ තුල්‍ය නිරූපනයක් ඇත ; මෙහි $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ හා $c \in \mathbb{R}^n$ වේ.
මෙම පද්ධතියට $x^* \in \mathbb{R}^n$ වූ අනන්‍ය විසඳුමක් ඇතැයි සිතමු.
ආරම්භක සන්නිකර්ෂණය $x^{(0)}$ වන $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$ පුනඃකරණ සූත්‍රය මඟින් ජනනය කරනු ලබන $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ අනුක්‍රමය සලකන්න. ; මෙහි $k = 0, 1, 2, ..., $ වේ.
$x^{(n)} - x^* = T^n(x^{(0)} - x^*)$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) (i) $Ax = b$ වන ඒකජ සමීකරණ පද්ධතියේ වියෝජනය (decomposition) $A = L + D + U$ සලකන්න. මෙහි L, D හා U පිළිවෙළින් A හි යටත් ත්‍රිකෝණාකාර, විකර්ණාකාර හා උඩත් ත්‍රිකෝණාකාර න්‍යාස කොටස් නිරූපනය කරයි.
$Ax = b$ විසඳීම සඳහා ගවුස් සයිඩල් පුනඃකරණ ක්‍රමය ගොඩනැගීමට මෙම වියෝජනය භාවිතා කරන්න.
පුනඃකරණ ක්‍රියාවලියේ සාධාරණ සූත්‍රය ලියාදක්වන්න.

සම්බන්ධිතයි.

(ii)

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

මගින් දෙනු ලබන ඒකජ සමීකරණ පද්ධතිය සලකන්න.
ආරම්භක සන්නිකර්ෂණය $x^{(0)} = (0\ 0\ 0)^T$ ලෙස ගෙන, ගවුස් සයිඩල් පුනඃකරණ ක්‍රමය භාවිතා කර දෙවන පුනඃකරණය $x^{(2)}$ සොයන්න.

---

3. (අ) $D = \{(t, y) | 0 \leq t \leq 3,\ -1 \leq y \leq 1\}$ සෘජුකෝණාශ්‍රාකාර පෙදෙස සලකන්න.
$f(t, y) = t^2 y - 1$; $y(0) = 1$ ලෙස ගනිමු.
f, D මත Lipschitz තත්ත්වය සපුරාලයිද? එසේ වේ නම් Lipschitz නියතයක් සොයන්න.

(ආ) $y' = 2y - x$; $y(0) = 1$ ආරම්භක අගීය ගැටළුව සලකන්න.
මෙම ආරම්භක අගීය ගැටළුව සඳහා $y_1(x)$, $y_2(x)$ හා $y_3(x)$ යන පිකාඩ් පුනඃකරණ ගණනය කරන්න.

(ඇ) $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 0$, ආරම්භක අගීය ගැටලුව සලකන්න. මෙහි $x(0) = 3$ හා $x'(0) = -5$ වේ.

(i) මෙම ආරම්භක අගීය ගැටලුව, තුල්‍ය වූ පළමු ගණයේ අවකල සමීකරණ පද්ධතියකට පරිණාමනය කරන්න.

(ii) පියවර අගය 0.1 ලෙස ගෙන, පද්ධතිය සඳහා ඔයිලර්ගේ ප්‍රකාශිත ක්‍රමය භාවිතා කර, $t = 0.1, 0.2$ හා 0.3 දී x' හා x සඳහා, ආසන්න අගයන් සොයන්න.

---

4. (අ) modifed ඔයිලර් ක්‍රමය හා ඔයිලර්ගේ ප්‍රකාශිත ක්‍රමය භාවිතා කර ආරම්භක අගීය ගැටලුවක විසඳුම ආසන්න කරන Predictor-Corrector ක්‍රමය විස්තර කරන්න.
ඉහත විස්තර කරන ලද Predictor-Corrector ක්‍රමය $y' = y - x^2$, $y(0) = 1$ ආරම්භක අගීය ගැටලුව සඳහා පියවර අගය $h = 0.1$ සමග භාවිතා කර, $y(0.1)$ හි ආසන්න අගය ලබාගන්න.

(ආ) $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ ආරම්භක අගීය ගැටළුව සහ සුපුරුදු අංකනයෙන් සාධාරණ ආකාරයේ දෙවන ස්ථලයේ රුන්ග කුටා ක්‍රමය
$y_{n+1} = y_n + h(b_1 f(x_n, y_n) + b_2 f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h f(x_n, y_n)))$ සලකන්න. ; h පියවර අගයයි.

(i) ටේලර් ප්‍රසාරනය සැලකීමෙන් දෙවන ගණයේ රුන්ග කුටා ක්‍රමය ලැබෙන පරිදි b_1, b_2, c_2 හා a_{21} පරාමිතීන් සඳහා $b_1 + b_2 = 1$, $b_2 c_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 a_{21} = \frac{1}{2}$ සමීකරණ ලබාගන්න.

(ii) $b_1 = \frac{1}{2}$ නම්, ඉහත (i) කොටසේ ව්‍යුත්පන්න කල සමීකරණවලට අනුරූප රුන්ග කුටා ක්‍රමය ලබාගන්න.

(iii) පියවර අගය 0.1 සමහ $y' = e^x + xy^2$; $y(1) = 4$ ආරම්භක අගීය ගැටළුවට මෙම ක්‍රමය යොදා, $y(1.2)$ සඳහා ආසන්න අගය ලබාගන්න.

සම්බන්ධිතයි.

5. $u(x,t)$ යනු, $t > 0$ සඳහා මායිම් තත්ත්ව $u(0,t) = T_0$ හා $u(a,t) = T_1$ ද,
$0 \leq x \leq a$ සඳහා ආරම්භක තත්ත්වය $u(x,0) = f(x)$ ද යටතේ
$u_{xx} = cu_t$, $t > 0$, $0 < x < a$ තාප සමීකරණයේ විසඳුම යැයි ගනිමු.

$x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ සහ $t_j = jk$, $j = 0, 1, 2, ...$ සලකන්න. මෙහි $h = \frac{a}{n}$, $k > 0$ යනු පිළිවෙලින් x හා t දිශාවන් ඔස්සේ වන ප්‍රමාණවත් තරම් කුඩා පියවර අගයන් වේ.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, $u_{i,j+1} = ru_{i+1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i-1,j}$ පරිමිත අන්තර සූත්‍රය ව්‍යුත්පන්න කරන්න. මෙහි $r = \frac{k}{ch^2}$ වේ.
සූත්‍රය සඳහා stencil එක අඳින්න.

$t > 0$ සඳහා මායිම් තත්ත්ව $u(0,t) = 0$ සහ $u(1,t) = 1$ ද,
$0 \leq x \leq 1$ සඳහා ආරම්භක තත්ත්වය $u(x,0) = x^3$ ද, යටතේ
$u_{xx} = u_t$, $t > 0$ හා $0 < x < 1$ තාප සමීකරණය සලකන්න.

$h = 0.2$ හා $k = 0.02$ සඳහා ඉහත පරිමිත අන්තර සූත්‍රය යොදාගනිමින්, $u_{xx} = u_t$,
$0 < t < 0.1$ හා $0 < x < 1$ තාප සමීකරණය විසඳන්න.

---

6. $u(x,t)$ යනු, $0 \leq x \leq a$ සඳහා ආරම්භක තත්ත්ව $u(x,0) = f(x)$ හා $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, ද,
$t \geq 0$ සඳහා මායිම් තත්ත්ව $u(0,t) = \phi(t)$ හා $u(a,t) = \phi(t)$, ද යටතේ
$u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $0 < x < a$ හා $t > 0$ තරංග සමීකරණයේ විසඳුමකි.

$x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ සහ $t_j = jk$, $j = 0, 1, 2, ...$ සලකන්න. මෙහි $h = \frac{a}{n}$, $k > 0$ යනු පිළිවෙලින් x හා t දිශාවන් ඔස්සේ වන ප්‍රමාණවත් තරම් කුඩා පියවර අගයන් වේ.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, $u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + \alpha^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2(1-\alpha^2)u_{ij}$ පරිමිත අන්තර සූත්‍රය ව්‍යුත්පන්න කරන්න. මෙහි $\alpha = \frac{ck}{h}$ වේ.

$0 \leq x \leq 1$ සඳහා ආරම්භක තත්ත්ව $u(x,0) = x(1-x)$ හා $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, ද,
$t \geq 0$ සඳහා මායිම් තත්ත්ව $u(0,t) = u(1,t) = 0$, ද, යටතේ
$u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < 1$ හා $0 < t < 1$ තරංග සමීකරණය සලකන්න.

ඉහත ව්‍යුත්පන්න කල පරිමිත අන්තර සූත්‍රය භාවිතා කර $h = k = 0.25$ සඳහා මෙම තරංග සමීකරණය විසඳන්න.

අවසාන පිටුව.