University of Ruhuna - Faculty of Science

Bachelor of Science General Degree - Level II
(Semester I) Examination - July 2016

Subject: Applied / Industrial Mathematics
Course Unit: AMT211β / IMT211β (Fluid Dynamics)
Time: Two (02) Hours

Answer <u>Four (04) questions</u> only

---

1. Obtain, in the usual notation, the equation of continuity for a moving fluid having density ρ and velocity $\underline{q}$ in the form
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\, \underline{q}) = 0.$$
Hence, for an incompressible, homogeneous and irrotational fluid, show that the equation of continuity can be reduced to the form $\underline{\nabla}^2\phi = 0$, where ϕ is the velocity potential.

The velocity components at a point in an incompressible fluid having spherical polar coordinates (r, θ, ψ) are $(2Mr^{-3}\cos\theta,\ Mr^{-3}\sin\theta,\ 0)$, where M is a constant.

(i) Show that the velocity is of the potential kind.

(ii) Find the velocity potential and the equations of the streamlines.

---

2. Derive, in the usual notation, the Euler's equation of motion,
$$\underline{F} - \frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p = \frac{d\underline{q}}{dt}$$
for a perfect fluid moving under a force $\underline{F}$ per unit mass and velocity $\underline{q}$.

Staring from the Euler's equation of motion for a perfect fluid and by using suitable conditions, deduce that
$$\underline{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} + \Omega\right) = \underline{q} \wedge \underline{\zeta},$$
where $\underline{\zeta} = \operatorname{curl}\underline{q}$ and Ω is the scalar potential such that $\underline{F} = -\underline{\nabla}\Omega$.

A perfect, incompressible fluid is moving steadily around the outside of a fixed cylinder of radius a and vertical axis OZ. The speed at a distance r from the axis OZ is $\frac{a}{r}$. Show that the motion is irrotational.

If the surface of the fluid is open to the atmosphere and the origin O is chosen on the free surface such that $z = 0$ when $r = a$, prove that the free surface is given by
$$2gz = 1 - \frac{a^2}{r^2}.$$

3. An incompressible inviscid fluid of uniform density ρ is in irrotational motion. Show, in the usual notation, that the kinetic energy T of the fluid enclosed by a surface S is given by

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS,$$

where $\underline{n}$ is the outward unit normal vector to the fluid surface and ϕ is the velocity potential.

The space between a solid sphere of radius a and a spherical shell of radius $b(b > a)$ is filled with an incompressible fluid. The sphere and shell have the constant velocities $u\underline{i}$ and $v\underline{i}$ respectively through the centers. Here $\underline{i}$ is the unit vector in the direction of the x-axis.

(i) Show that at the instant when the sphere and shell are concentric, the velocity potential of the fluid is given by

$$\phi = \left(\frac{ua^3 - vb^3}{b^3 - a^3} r + \frac{(u - v)a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)} r^{-2} \right) \cos\theta.$$

(You may assume that the velocity potential of the fluid is in the form $\phi = (Ar + Br^{-2})\cos\theta$ and fluid motion is irrotational).

(ii) Find the kinetic energy of the fluid near the sphere.

(iii) What can you say about the above kinetic energy when $b \to \infty$?

4. Show, in the usual notation, that the velocity potential at any point P due to the three dimensional doublet (dipole) of strength μ is

$$\frac{\mu \cos\theta}{r^2},$$

where O is the origin, $OP = r$ and θ is the angle between OP and the x-axis.

(You may assume that the velocity potential at any point P due to a three dimensional source of strength m which is at the origin is $\frac{m}{r}$, where $OP = r$.)

The plane $x = 0$ is a rigid boundary to a fluid of constant density occuring in the region $x > 0$. A three dimensional doublet of strength μ, whose axis is in the direction of the x-axis, is placed at a point A on the x-axis in the fluid, where $OA = a$ and O is the origin.

(i) Show that the velocity potential at any point P of the system is

$$\phi = \frac{\mu(r\cos\theta - a)}{(r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta)^{3/2}} - \frac{\mu(r\cos\theta + a)}{(r^2 + a^2 + 2ra\cos\theta)^{3/2}},$$

where $OP = r$ and θ is the angle between OP and the x-axis.

(ii) Find the velocity potential at any point on the rigid boundary.

(iii) Find the velocity components of the fluid at a point on the rigid boundary in spherical polar coordinates.

(iv) If the pressure at infinity is P_∞, show that the difference between pressure on the boundary and P_∞ is

$$\frac{18\mu^2 a^2 r^2 \rho}{(r^2 + a^2)^5}.$$

(You may assume that the fluid is irrotational)

5. The complex potential at any point in a two dimensional fluid is given by

$$\omega(z) = -m \ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right),$$

where m and a are real constants.

What arrangement of source and sink will give rise to the above complex potential?

Now, the above system is placed in a fluid moving with the constant velocity $-v\underline{i}$. Here $\underline{i}$ is the unit vector in the direction of x-axis.

(i) Write down the new complex potential of the system.

(ii) Show that the streamlines of the system are given by

$$\frac{2ya}{x^2 - a^2 + y^2} = \tan^{-1}\left(\frac{vy}{m}\right).$$

(iii) Find the stagnation points of the system.

---

6. State the Milne-Thomson circle theorem and its extension.

A source and sink of equal strength m are placed at the points $(a/2, 0)$ and $(-a/2, 0)$ respectively within a fixed circular boundary $|z| = a$.

(i) Show that the complex potential of the system is

$$\omega(z) = m \ln\left(\frac{(2z+a)(2a+z)}{(2z-a)(2a-z)}\right).$$

(ii) Show that the streamlines are given by

$$\left(r^2 - \frac{1}{4}a^2\right)(r^2 - 4a^2) - 4a^2y^2 = ky(r^2 - a^2),$$

where $k = -\dfrac{5a}{\tan\left(\dfrac{\psi}{m}\right)}$ and ψ is the stream function.

(iii) Find the speed of fluid at the point (a, θ).

රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය - විද්‍යා පීඨය

විද්‍යාවේදී සාමාන්‍ය උපාධි - දෙවන ස්ථර (පළමු සමාසික) පරීක්ෂණය - 2016 ජූලි

විෂයය: ව්‍යවහාරික / කර්මාන්ත ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: AMT211β/IMT211β (තරල ගතිකය)
කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න හතරකට (04) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

1. $\underline{q}$ ප්‍රවේගයෙන් චලනය වන ඝනත්වය ρ වන තරලයක් සඳහා සාන්තත්‍ය සමීකරණය, සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\underline{q})=0$$

ආකාරයෙන් ලබාගන්න.

ඒනයින්, අසම්පීඩ්‍ය, සමජාතීය, නිර්භ්‍රමණ තරලයක් සඳහා සාන්තත්‍ය සමීකරණය $\underline{\nabla}^2\phi=0$ ආකාරයට ඌනනය කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි ϕ යනු ප්‍රවේග විභවය වේ.

අසම්පීඩ්‍ය තරලයක ගෝලීය ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක (r,θ,ϕ) සහිත ලක්ෂ්‍යයක ප්‍රවේග සංරචක $(2Mr^{-3}\cos\theta,\ Mr^{-3}\sin\theta,\ 0)$ වේ; මෙහි M යනු නියතයකි.

(i) ප්‍රවේගය විභව ආකාරයෙන් ඇති බව පෙන්වන්න.

(ii) ප්‍රවේග විභවය සහ අනාකූල රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

---

2. ඒකක ස්කන්ධයකට $\underline{F}$ බලයක් යටතේ $\underline{q}$ ප්‍රවේගයෙන් චලනය වන පරිපූර්ණ තරලයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$\underline{F}-\frac{1}{\rho}\underline{\nabla}p=\frac{d\underline{q}}{dt}$$

යන ඔයිලර් සමීකරණය ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

පරිපූර්ණ තරලයක් සඳහා ඔයිලර් සමීකරණයෙන් ආරම්භ කරමින් හා සුදුසු තත්වයන් උපයෝගී කරගනිමින්

$$\underline{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}+\Omega\right)=\underline{q}\wedge\underline{\zeta}$$

බව අපෝහනය කරන්න; මෙහි $\underline{\zeta}=\mathrm{curl}\,\underline{q}$ වන අතර Ω යනු $\underline{F}=-\underline{\nabla}\Omega$ වන පරිදි අදිශ විභවය වේ.

අරය a සහ සිරස් අක්ෂය OZ වන අචල සිලින්ඩරයක පිටත පෙදෙසෙහි පරිපූර්ණ, අසම්පීඩ්‍ය තරලයක් සතත ලෙස චලනය වේ. OZ අක්ෂයේ සිට r දුරකදී තරලයේ වේගය $\frac{a}{r}$ වේ. තරලය නිර්භ්‍රමණ බව පෙන්වන්න.

තරල පෘෂ්ඨය වායුගෝලයට විවෘත වේ නම් සහ නිදහස් පෘෂ්ඨය මත O මූලය තෝරාගෙන ඇත්තේ $r=a$ විට $z=0$ වන ලෙස නම් නිදහස් පෘෂ්ඨයේ සමීකරණය

$$2gz=1-\frac{a^2}{r^2}$$

බව සාධනය කරන්න.

සම්බන්ධිතයි.

3. ρ නම ඒකාකාර ඝනත්වයෙන් යුත් අසම්පීඩ්‍ය සුස්‍රාවී තරලයක් නිර්භ්‍රමණ චලිතයේ යෙදේ. S නම පෘෂ්ඨයක් මගින් අන්තර්ගත කරන තරලයේ චාලක ශක්තිය වන T, සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $\underline{n}$ යනු තරල පෘෂ්ඨයෙන් ඉවතට ඇදි ඒකක අභිලම්බ දෛශිකයද, ϕ යනු ප්‍රවේග විභවයද වේ.

අරය a වූ ඝන ගෝලයක් සහ අරය $b(> a)$ වූ ගෝලීය කබොලක් අතර අවකාශය අසම්පීඩ්‍ය තරලයකින් පුරවා ඇත. ගෝලයේ සහ කබොලේ කේන්ද්‍ර හරහා වූ නියත ප්‍රවේග පිළිවෙලින් $u\underline{i}$ සහ $v\underline{i}$ වේ. මෙහි $\underline{i}$ යනු x-අක්ෂය දිශාවේ වන ඒකක දෛශිකය වේ.

(i) ගෝලය සහ කබොල ඒකකේන්ද්‍රීයව පිහිටන විට තරලයේ ප්‍රවේග විභවය

$$\phi = \left(\frac{ua^3 - vb^3}{b^3 - a^3} r + \frac{(u-v)a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)} r^{-2} \right) \cos\theta$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(තරලයේ ප්‍රවේග විභවය $\phi = (Ar + Br^{-2})\cos\theta$ ආකාරයට වන බව සහ තරල චලිතය නිර්භ්‍රමණ බව ඔබට උපකල්පනය කල හැකිය.)

(ii) ගෝලයට ආසන්න තරලයේ චාලක ශක්තිය සොයන්න.

(iii) $b \to \infty$ වන විට ඉහත චාලක ශක්තිය ගැන ඔබට කුමක් කිව හැකිද?

---

4. ප්‍රබලතාවය μ වන ත්‍රිමාන ද්විධ්‍රැවයක් හේතුකොටගෙන ඕනෑම P ලක්ෂ්‍යයකදී ප්‍රවේග විභවය, සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$\frac{\mu \cos\theta}{r^2}$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි O යනු මූලයද, $OP = r$ සහ θ යනු OP සහ x-අක්ෂය අතර කෝණය වේ.

($OP = r$ වන පරිදි O මූලයෙහි තබා ඇති ප්‍රබලතාවය m වන ත්‍රිමාන ප්‍රභවයක් නිසා ඕනෑම P ලක්ෂ්‍යයක ප්‍රවේග විභවය $\dfrac{m}{r}$ බව ඔබට උපකල්පනය කල හැකිය.

නියත ඝනත්වයෙන් යුත් තරලයක් සඳහා $x = 0$ තලය දෘඩ මායිමක් ලෙස ක්‍රියා කරන අතර තරලය $x > 0$ පෙදෙසෙහි පවතී. තම අක්ෂය OX දිශාවට වූ ප්‍රබලතාවය μ වන ත්‍රිමාන ද්විධ්‍රැවයක්, තරලය තුළ OX අක්ෂය මත වූ A ලක්ෂ්‍යයක තබා ඇත; මෙහි $OA = a$ සහ O යනු මූලය වේ.

(i) ඕනෑම P ලක්ෂ්‍යයකදී පද්ධතියේ ප්‍රවේග විභවය

$$\phi = \frac{\mu(r\cos\theta - a)}{(r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta)^{3/2}} - \frac{\mu(r\cos\theta + a)}{(r^2 + a^2 + 2ra\cos\theta)^{3/2}}$$

බව පෙන්වන්න; මෙහි $OP = r$ සහ θ යනු OP සහ x-අක්ෂය අතර කෝණය වේ.

(ii) දෘඩ මායිම මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයකදී ප්‍රවේග විභවය සොයන්න.

(iii) ගෝලීය ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක අනුසාරයෙන් දෘඩ මායිම මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයකදී තරලයේ ප්‍රවේග සංරචක සොයන්න.

සම්බන්ධිතයි.

(iv) අනන්තයේදී පීඩනය P_∞ නම්, මායිම මත පීඩනය සහ P_∞ අතර වෙනස

$$\frac{18\mu^2 a^2 r^2 \rho}{(r^2 + a^2)^5}$$

බව පෙන්වන්න.
(තරල චලිතය නිර්භ්‍රමණ බව ඔබට උපකල්පනය කළ හැකිය.)

---

5. ද්විමාන තරලයක් තුළ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයකදී සංකීර්ණ විභවය,

$$\omega(z) = -m \ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$$

මගින් දෙනු ලැබේ. මෙහි m සහ a යනු තාත්වික නියත වේ.
ප්‍රභව සහ ආපායන වල කුමන සැකැසීමක් ඉහත සංකීර්ණ විභවය ලබාදීමට හේතු වේද?
දැන් ඉහත පද්ධතිය නියත $-v\underline{i}$ ප්‍රවේගයකින් චලනය වන තරලයක් තුළ තබනු ලැබේ. මෙහි $\underline{i}$ යනු x-අක්ෂය දිගාවේ වන ඒකක දෛශිකය වේ.

(i) පද්ධතියේ නව සංකීර්ණ විභවය ලියා දක්වන්න.

(ii) $\dfrac{2ya}{x^2 - a^2 + y^2} = \tan^{-1}\left(\dfrac{vy}{m}\right)$ මගින් පද්ධතියේ අනාකුල රේඛා දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(iii) පද්ධතියේ නිසලන ලක්ෂ්‍ය සොයන්න.

---

6. මිල්න්-තොම්සන් වෘත්ත ප්‍රමේයය සහ එහි විස්තීර්ණය ප්‍රකාශ කරන්න.
$|z| = a$ අවල වෘත්තාකාර මායිමක් තුළ එකම m ප්‍රබලතාවයෙන් යුත් ප්‍රභවයක් සහ ආපායනයක් පිළිවෙලින් $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ සහ $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ ලක්ෂ්‍යවල තබා ඇත.

(i) පද්ධතියේ සංකීර්ණ විභවය

$$\omega(z) = m \ln\left(\frac{(2z+a)(2a+z)}{(2z-a)(2a-z)}\right)$$

බව පෙන්වන්න.

(ii) අනාකුල රේඛා

$$\left(r^2 - \frac{1}{4}a^2\right)(r^2 - 4a^2) - 4a^2y^2 = ky(r^2 - a^2)$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි $k = -\dfrac{5a}{\tan\left(\dfrac{\psi}{m}\right)}$ සහ ψ යනු අනාකුල ශ්‍රිතය වේ.

(iii) (a, θ) ලක්ෂ්‍යයේදී තරලයේ වේගය සොයන්න.

අවසාන පිටුව.