University of Ruhuna

Bachelor of Science General Degree
Level II (Semester II) Examination

November/December 2016

Subject: Mathematics
Course Unit: MPM2213/MAT221β (Number Theory) **Time:** Two (02) Hours

Answer Four (04) Questions only

---

1. (a) Let a, b, and c be integers. Show that

(i) if $a|b$ and $b|c$, then $a|c$,

(ii) if $a|b$ and $c|d$, then $ac|bd$.

(b) (i) Prove that if a is even, then $3a^2 + 2a + 156$ is divisible by 4.

(ii) Find all positive integers n such that n divides both $x^2 + 1$ and $(x+1)^2 + 1$ for some integer x.

(c) (i) Let a and b be any integers with $a > 0$. Then, show that there exists unique integers q and r such that $b = qa + r$, where $0 \leq r < a$.

(ii) Let r be the remainder when 760, 880, and 1060 are divided by d, where $d > 1$. Find the value of $d - r$.

---

2. (a) For given nonzero integers a and b, define, in the usual notation

(i) the greatest common divisor $\gcd(a, b)$ and,

(ii) the least common multiple $\operatorname{lcm}(a, b)$.

(b) Let a, b, and c be integers. Show that

(i) if $\gcd(a, b) = 1$ and $a|bc$, then $a|c$,

(ii) if $\gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1$, then $\gcd(c, ba) = 1$,

(iii) $\operatorname{lcm}(a, b)\gcd(a, b) = |ab|$.

(c) (i) Use the Euclid algorithm to find $\gcd(9081, 3270)$.

(ii) Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be nonzero integers such that $n \geq 3$.
Then, show that $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

---

3. (a) (i) Define, in the usual notation, the functions $\sigma(n)$ and $\tau(n)$ for a positive integer n.

(ii) Show that functions $\sigma(n)$ and $\tau(n)$ are multiplicative.

(b) Let p_i and α_i be primes and positive integers respectively for $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. If $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ represents the standard form of the positive integer n, then, show that

(i) $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \dfrac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$ and,

(ii) $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)$.

(c) (i) Let $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ represent the standard form of the positive integer n. Then, write down the expression to calculate $\phi(n)$.

(ii) Find the value of $\phi(9054)$.

---

4. (a) (i) Linear Diophantine equations are of the form $ax + by = c$, where a, b, and c are given integers. Show that $ax + by = c$ has a solution if and only if $d|c$, where $d = \gcd(a, b)$.

(ii) Suppose that (x_0, y_0) is one solution of $ax + by = c$. Write down the expression for the full set of integer solutions.

(b) Find an integer solution of $3689x + 4182y = 100$, or explain why one does not exist.

(c) A cargo company has to move 844 washing machines. They have two types of trucks, one that carries 28 washing machines and one that carries 34 washing machines. The company only sends out full trucks, and the trucks return empty. Let x be the number of "small" trucks and y be the number of "large" trucks.

(i) Write down a linear Diophantine equation for moving washing machines using "small" and "large" trucks.

(ii) List all possible ways to move all the washing machines.

---

5. (a) Show, in the usual notation, that.

(i) if $a \equiv b \bmod m$ and $b \equiv c \bmod m$ then $a \equiv c \bmod m$ and

(ii) if $a \equiv b \bmod m$ and $d|m$, $d > 0$ then $a \equiv b \bmod d$.

(b) (i) Let $a \equiv b \bmod m$ and $n \in \mathbb{Z}^+$. Then, show that $a^n \equiv b^n \bmod m$.

(ii) Prove that 7 divides $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

(c) A collection of items is packed for distributing to a new location. When packing in boxes of 3 items, there are 2 left over, when packing in boxes of 5 items there are 3 left over and when packing in boxes of 7 items there are 2 left over. How many items are in the collection?

---

6. (a) (i) Let p be an odd prime number. Let a be a positive integer relatively prime to p. Write down Euler's criterion under which the equation $x^2 \equiv a \bmod p$ has solutions.

(ii) Determine whether the equation $x^2 \equiv 7 \bmod 31$ is solvable or not.

(b) Find two consecutive odd numbers whose product is 11 more than a multiple of 83.
[**Hint:** The square roots of 3 modulo 83 are 13 and 70]

(c) Prove that the area of a Pythagorean triangle can never be equal to a perfect square.

රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි

(දෙවන ස්ථල) දෙවන සමාසික පරීක්ෂණය

2016 නොවැම්බර්/දෙසැම්බර්

විෂයය: ගණිතය

පාඨමාලා ඒකකය: MPM2213/MAT221β (සංඛ්‍යා වාදය) **කාලය:** පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න **04** කට **පමණක්** පිළිතුරු සපයන්න

---

1. (අ) a, b, සහ c නිඛිල ලෙස ගන්න.

(i) $a|b$ සහ $b|c$ විට $a|c$ බව,

(ii) $a|b$ සහ $c|d$ විට $ac|bd$ බව,

පෙන්වන්න.

(ආ) (i) a ඉරට්ටේ නම් එවිට $3a^2 + 2a + 156$ යන්න 4 න් බෙදිය හැකි බව ඔප්පු කරන්න.

(ii) කිසියම් නිඛිල x සඳහා $x^2 + 1$ සහ $(x+1)^2 + 1$ යන දෙකම n මගින් බෙදිය හැකි වන පරිදි පවතින සියලු ධන නිඛිල n සොයන්න.

(ඇ) (i) a සහ b යනු $a > 0$ ලෙස පවතින ඕනෑම නිඛිල ලෙස ගන්න. එවිට $b = qa + r$ (මෙහි $0 \leq r < a$) වන පරිදි නිශ්චිත q සහ r නිඛිල පවතින බව පෙන්වන්න.

(ii) 760, 880, සහ 1060 යන සංඛ්‍යා d (මෙහි $d > 1$) වලින් බෙදූ විට ලැබෙන ඉතිරිය r ලෙස ගන්න. එවිට $d - r$ වල අගය සොයන්න.

---

2. (අ) දෙන ලද a සහ b නිශ්ශූන්‍ය නිඛිල සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්

(i) මහා පොදු සාධකය $\gcd(a, b)$ සහ

(ii) කුඩා පොදු ගුණාකාරය $\mathrm{lcm}(a, b)$

අර්ථ දක්වන්න.

(ආ) a, b, සහ c නිඛිල ලෙස ගන්න. එවිට

(i) $\gcd(a, b) = 1$ සහ $a|bc$ නම් $a|c$ බව,

(ii) $\gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1$ නම් $\gcd(c, ba) = 1$ බව,

(iii) $\mathrm{lcm}(a, b)\gcd(a, b) = |ab|$ බව,

පෙන්වන්න.

(ඇ) (i) $\gcd(9081, 3270)$ සෙවීමට යුක්ලිඩියානු ඇල්ගොරිතමය භාවිත කරන්න.

(ii) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ යනු $n \geq 3$ වන පරිදි පවතින නිශ්ශූන්‍ය නිඛිල යැයි ගන්න. එවිට $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$ බව පෙන්වන්න.

---

3. (අ) (i) n ධන නිඛිලයක් සඳහා, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\sigma(n)$ සහ $\tau(n)$ යන ශ්‍රිත අර්ථ දක්වන්න.

(ii) $\sigma(n)$ සහ $\tau(n)$ යන ශ්‍රිත ගුණන්‍ය බව පෙන්වන්න.

(ආ) $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ සඳහා p_i සහ α_i යනු පිළිවෙලින් ප්‍රථමක සහ ධන නිඛිල යැයි ගන්න. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ මගින් n හි සම්මත ආකාරය දෙනු ලබන්නේ නම්, එවිට

(i) $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \dfrac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$, සහ

(ii) $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$,

සම්බන්ධිතයි.

බව පෙන්වන්න.

(ඇ) (i) $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ මගින් n ධන නිඛිලයෙහි සම්මත ආකාරය දෙනු ලබන්නේ යැයි ගන්න. එවිට $\phi(n)$ ගණනය කිරීම සඳහා ප්‍රකාශනය ලියා දක්වන්න.

(ii) $\phi(9054)$ හි අගය සොයන්න.

---

4. (අ) (i) ඒකජ ඩයෝෆැන්ටනීය සමීකරණ $ax + by = c$ ආකාරය ගන්නා අතර මෙහි a, b, සහ c යනු දෙන ලද නිඛිල වේ. එවිට $d|c$ (මෙහි $d = \gcd(a, b)$) නම් සහ එනම් පමණක් $ax + by = c$ ට විසඳුම් පවතින බව පෙන්වන්න.

(ii) (x_0, y_0) යනු $ax + by = c$ හි එක් විසඳුමක් යැයි සිතමු. සම්පූර්ණ නිඛිල විසඳුම් කුලකය සඳහා ප්‍රකාශනය ලියා දක්වන්න.

(ආ) $3689x + 4182y = 100$ හි නිඛිල විසඳුමක් සොයන්න; එසේ විසඳුම් නොපවතී නම් ඒ මන්ද යන්න පැහැදිලි කරන්න.

(ඇ) බඩු ප්‍රවාහන වෙළඳ සමාගමකට රෙදි සෝදන යන්ත්‍ර 844 ක් වෙනත් ස්ථානයකට යැවීමට අවශ්‍ය වී ඇත. ඔවුන්ට රෙදි සෝදන යන්ත්‍ර 28 ක් ගෙන යා හැකි සහ රෙදි සෝදන යන්ත්‍ර 34 ක් ගෙන යා හැකි ලෙස ට්‍රක් රථ වර්ග දෙකක් ඇත. වෙළඳ සමාගම සම්පූර්ණ ලෙස පිරුණු රථ පමණක් එළියට යවන අතර ට්‍රක් රථ නැවත පැමිණෙන්නේ හිස්වය. කුඩා ට්‍රක් රථ ප්‍රමාණය x ලෙසද විශාල ට්‍රක් රථ ප්‍රමාණය y ලෙසද ගන්න.

(i) කුඩා සහ විශාල ට්‍රක් රථ භාවිතා කරමින් රෙදි සෝදන යන්ත්‍ර වෙනත් ස්ථානයකට යැවීමට අදාළ ඒකජ ඩයෝෆැන්ටනීය සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

(ii) සියලුම රෙදි සෝදන යන්ත්‍ර වෙනත් ස්ථානයකට යැවිය හැකි සියලු අකාර ලියා දක්වන්න.

---

5. (අ) සුපුරුදු අංකනයෙන්,

(i) $a \equiv b \mod m$ සහ $b \equiv c \mod m$ නම් එවිට $a \equiv c \mod m$ බව,

(ii) $a \equiv b \mod m$ සහ $d|m$ (මෙහි $d > 0$) නම් එවිට $a \equiv b \mod d$ බව,

පෙන්වන්න.

(ආ) (i) $a \equiv b \mod m$ සහ $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගන්න. එවිට $a^n \equiv b^n \mod m$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $2222^{5555} + 5555^{2222}$ යන්න 7 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

(ඇ) අයිතම වල එකතුවක් වෙනත් ස්ථානයකට රැගෙන යෑම සඳහා ඇසුරුම් කරනු ලැබේ. අයිතම 3 බැගින් පෙට්ටිවල ඇසිරීමේදී 2 ක් ද, අයිතම 5 බැගින් පෙට්ටිවල ඇසිරීමේදී 3 ක් ද සහ අයිතම 7 බැගින් පෙට්ටිවල ඇසිරීමේදී 2 ක් ද ඉතිරි වෙයි. එකතුව තුළ අයිතම කොපමණ සංඛ්‍යාවක් තිබේද?

---

6. (අ) (i) p යනු ඔත්තේ ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් සහ a යනු p සමග සාපේක්ෂ ලෙස ප්‍රථමක වන ධන නිඛිලයක් යැයි ගන්න. එවිට $x^2 \equiv a$ මාපා p සමීකරණයට විසඳුම් පැවතීම සඳහා වන ඔයිලර් උපමානය ලියා දක්වන්න.

(ii) $x^2 \equiv 7$ මාපා 31 සමීකරණය විසඳිය හැකිද නැද්ද යන්න නිර්ණය කරන්න.

(ආ) 83 හි ගුණාකාරයකට වඩා 11 ක් වැඩි වන පරිදි ඒවායේ ගුණිතය ලබා දෙන අනුයාත ඔත්තේ සංඛ්‍යා දෙකක් සොයන්න.

[**ඉඟිය:** 3 මාපාංක 83 හි වර්ග මූල 13 සහ 70 වේ.]

(ඇ) පයිතගරස් ත්‍රිකෝණයක වර්ගඵලය පූර්ණ වර්ගයකට කිසිවිටක සමාන විය නොහැකි බව ඔප්පු කරන්න.

අවසාන පිටුව.