රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය
සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි පළමු ස්ථල (පළමු සමාසික) පරීක්ෂණය
සැප්තැම්බර-2017

විෂයය: කාර්මික ගණිතය/ ව්‍යවහාරික ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: IMT111β/AMT111β/MAM1133
(පෞරාණික යාන්ත්‍රවිද්‍යාව- I - ගතිකය)

කාලය: පැය දෙක (02) යි

ප්‍රශ්ණ 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

1. (අ) චුම්භක ක්ෂේත්‍රයක චලනය වන ආරෝපිත අංශුවක ගමන් පථයේ පරාමිතික සමීකරණයන්

$$x = b\cos\Omega t, \quad y = b\sin\Omega t, \quad z = ct,$$

මගින් දෙනු ලැබේ. මෙහි b, Ω සහ c ධන නියතවේ. චුම්භක ක්ෂේත්‍රය තුල චලනය වන අංශුවට නියත වේගයක් ඇති බවද, ත්වරණයේ විශාලත්වය නියත වන බවද පෙන්වන්න.

(ආ) දිග a වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වන අංශුවක් සම්බන්ධ කර ඇති අතර තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර O ලක්ෂ්‍යයට සවිකර ඇත. රූප සටහන 1 (Figure 1) හි දැක්වෙන පරිදි අංශුවට OC අක්ෂ්‍ය වටා භ්‍රමණය විය හැක. ඕනෑම මොහොතක අංශුවේ වේගය u,

$$u^2 = ag\sin\alpha\tan\alpha,$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි α යනු සුලු කෝණයකි.

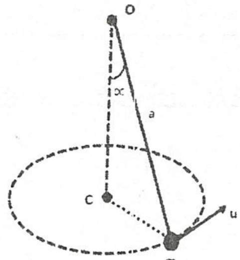

Figure 1:

(ඇ) ආරම්භයේදී ස්කන්ධය m වන අංශුවක් $z = 0$ වන පරිදි පිහිටා ඇත. අනතුරුව එය v_0 වේගයෙන් පහලට චලිතය ආරම්භ කරයි. අංශුව මත βv වන වාත ප්‍රතිරෝධයක් ක්‍රියාත්මක වේ. මෙහි v යනු කාලය t වනවිට අංශුවේ ප්‍රවේගය වන අතර β යනු ධන නියතයකි.

$$v = \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{\frac{-\beta t}{m}}\right) + v_0 e^{\frac{-\beta t}{m}}$$

වන බව පෙන්වන්න.

සම්බන්ධිතයි.

2. (අ) සුපුරුදු අංකනයෙන්, චලනය වන අංශුවක ප්‍රවේග හා ත්වරණ සංරචකයන් සිලින්ඩරාකාර ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක භාවිතයෙන්

(i) $\underline{v} = \dot{r}\hat{\underline{r}} + r\dot{\theta}\hat{\underline{\theta}} + \dot{z}\hat{\underline{z}}$,

(ii) $\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\underline{r}} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\underline{\theta}} + \ddot{z}\hat{\underline{z}}$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ආ) $r = 0.5m$, $\theta = (0.5t^3)rad$, සහ $z = (2 - 0.2t^2)m$ වන පරිදි අර්ථ දක්වා ඇති හෙලික්සීය බැවුම් මගක(helical ramp) පෙට්ටියක් පහලට රූප සටහන 2 (Figure 2)හි පෙනෙන පරිදි ලිස්සා යනු ලැබේ; මෙහි t තත්පර වේ. පෙට්ටියේ ප්‍රවේගයේ සහ ත්වරණයේ සංරචකයන් t අසුරෙන් නිර්ණය කරන්න. තවද, $\theta = 2\pi\ rad$ වන අවස්ථාවේදී පෙට්ටියේ ප්‍රවේගයේ සහ ත්වරණයේ විශාලත්වයන් පිළිවෙලින් $4.16ms^{-1}$ සහ $33.1ms^{-2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

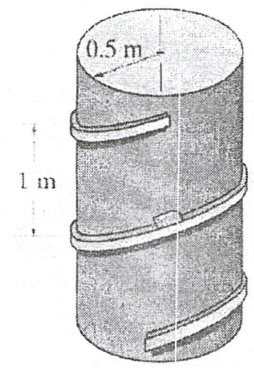

Figure 2:

---

3. (අ) අංශු පද්ධතියක් සඳහා, මූලය අනුබද්ධයෙන් මුළු කෝණික ගම්‍යතාවය $\underline{H}_0$ ලෙස අර්ථ දක්වයි. සුපුරුදු අංකනයෙන්

(i) $\frac{dH_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i$, සහ

(ii) $\underline{H}_0 = \underline{r}_G \times M\underline{V}_G + \underline{H}_G$

බව පෙන්වන්න.

(ආ) ස්කන්ධයන් $3m, 5m, 2m$ සහ $4m$ වූ අංශු පද්ධතියක් බල ක්ෂේත්‍රයක් යටතේ චලනය වනුයේ ඕනෑම t කාලයකදී අචල ඛණ්ඩාංක අක්ෂ පද්ධතියක් අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙලින් $(t, 0, -t), (-2t^2, t, 3t^3), (3t, -1, 2t)$ සහ $(4t, -2t, 0)$ ලක්ෂ්‍යයන්හි පිහිටන පරිදිය. මෙහි $t(> 0)$ මගින් දැක්වෙනු ලබන්නේ කාලයයි.

සම්බන්ධිතයි.

ඉහත පද්ධතියේ

(i) ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය,

(ii) ඕනෑම t කාලයකදී, මූල කෝණික ගම්‍යතාවය $\underline{H}_0$,

(iii) $t = 1$ දී ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය වටා මූල කෝණික ගම්‍යතාවය,

සොයන්න.

---

4. (අ) සුපුරුදු අංකනයෙන්, අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන ක්ෂණික අක්ෂ්‍ය වටා එක් ලක්ෂ්‍යකට සවි කර ඇති දෘඩ වස්තුවක කෝණික ගම්‍යතාවය,

$$\underline{H} = (H_1, H_2, H_3) = \sum m_i(\underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)),$$

මගින් දෙනු ලැබේ.

$$H_1 = I_{xx}\omega_1 + I_{xy}\omega_2 + I_{xz}\omega_3$$
$$H_2 = I_{xy}\omega_1 + I_{yy}\omega_2 + I_{yz}\omega_3$$
$$H_3 = I_{xz}\omega_1 + I_{yz}\omega_2 + I_{zz}\omega_3$$

බව පෙන්වන්න. එනයින්, ප්‍රධාන අවතිථි ඝූර්ණය I

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0,$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ආ) $OXYZ$ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඛණ්ඩාංක අක්ෂ පද්ධතිය මත පිහිටි රූප සටහන 3 (Figure 3) හි පෙන්නුම් කරනු ලබන $ABCD(DC = a, BC = b)$ ඒකාකාර සෘජුකෝණාස්‍රාකාර තහඩුව සලකන්න.

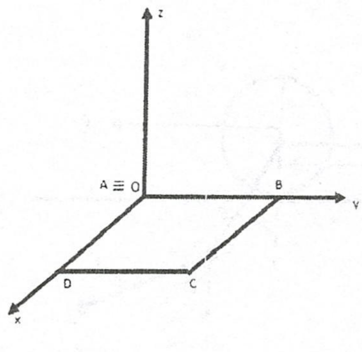

Figure 3:

(i) අවස්තිථි ඝූර්ණ,

(ii) අවස්තිථි ගුණිත,

(iii) තහඩුවේ ප්‍රධාන අවස්තිථි ඝූර්ණ,

සොයන්න.

සම්බන්ධිතයි.

5. (අ) අක්ෂ පද්ධති දෙක සඳහා එකම O මූලය වන පරිදි XYZ (F මගින් නිරූපිත) අක්ෂ පද්ධතියට සාපේක්ෂව $\underline{\omega}$ කෝණික ප්‍රවේගයකින් චලනය වන xyz (M මගින් නිරූපිත) වන අක්ෂ පද්ධතිය තුළ $\underline{r}$ පිහිටුම් දෛශිකය සහිත අංශුවක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, ප්‍රවේගය,

$$\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_F = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_M + \underline{\omega} \times \underline{r},$$

ලෙසද,

$$\left(\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right)_F = \left(\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right)_M + \left(\frac{d\underline{\omega}}{dt}\right)_M \times \underline{r} + 2\underline{\omega} \times \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_M + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}),$$

ත්වරණය ලෙසද ලබාගන්න.

(ආ) xyz අක්ෂය පද්ධතිය තුල පිහිටි අංශුවක පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{r} = (t^2+1)\underline{i} - 8t\underline{j} + 3t\underline{k}$ මගින් දෙනු ලැබේ. XYZ අක්ෂය පද්ධතියට සාපේක්ෂව xyz අක්ෂය පද්ධතියෙහි කෝණික ප්‍රවේගය $\underline{\omega} = 5t\underline{i} - t^2\underline{j} + (2t+2)\underline{k}$ මගින් දෙනු ලැබේ; මෙහි t යනු කාලයයි. $t = 2$ කාලයේදී

(i) දෘශ්‍යමාන ප්‍රවේගය ,

(ii) සත්‍ය වේගය,

(iii) දෘශ්‍යමාන ත්වරණය ,

(iv) සත්‍ය ත්වරණය ,

සොයන්න.

---

6. අරය a සහ ස්කන්ධය $2m$ වන ඒකාකාර තැටියක් ලිස්සීමකින් තොරව තිරස් රේලක් දිගේ පෙරලේ. තැටියේ කෙන්ද්‍රයෙන් දිග a වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු මගින් රූප සටහන 4 (Figure 4) හි දැක්වෙන පරිදි ද්විත්ව අවලම්බයක් එල්ලා ඇත. සම්පූර්ණ පද්ධතියට සිරස් තලයේ චලනය විය හැකිය. පද්ධතියේ චලිතය විස්තර කිරීමට අවශ්‍ය සමීකරණ ලග්රාන්ජ්ගේ සමීකරණ භාවිතයෙන් ලබාගන්න.

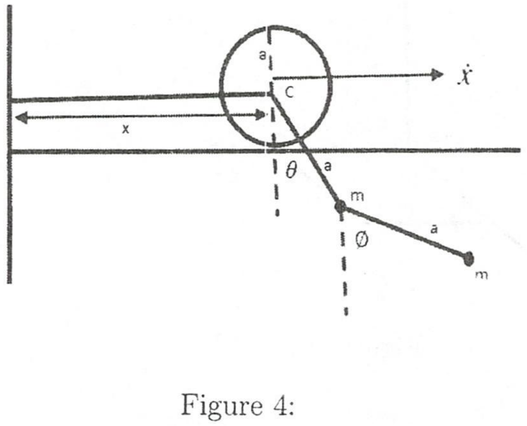

Figure 4:

[චලන පද්ධතියක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් ලග්රාන්ජ් සමීකරණ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots n,$$

මගින් දෙනු ලැබේ යැයි ඔබට උපකල්පනය කල හැක. මෙහි L යනු ලග්රාන්ජ් ශ්‍රිතයවේ.]

අවසාන පිටුව.