රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය - විද්‍යා පීඨය

විද්‍යාවේදී සාමාන්‍ය උපාධි - ප්‍රථම ස්ථල

(පළමු සමාසික) පරීක්ෂණය - 2017 සැප්තැම්බර්

විෂයය: ගණිතය

පාඨමාලා ඒකකය: MAT111β / MAM1113 (දෛශික විශ්ලේෂණය) **කාලය: පැය දෙකයි (02)**

ප්‍රශ්න හතර (04) කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

1. P යනු ත්‍රිමාන අවකාශයෙහි ℓ සරල රේඛාවක් මත පිහිටි O මූලය අනුබද්ධයෙන් පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ වූ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. මෙම රේඛාව මත පිහිටි, O මූලය අනුබද්ධයෙන් පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ වූ A සහ B ඕනෑම අචල ලක්ෂ්‍ය දෙකක් සලකමු.

ℓ සරල රේඛාවෙහි දෛශික සමීකරණය

$$\underline{r} = \underline{a} + \lambda\underline{c}$$

ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු පරාමිතියක් සහ $\underline{c} = \underline{b} - \underline{a}$ වේ.

$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ සහ $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ නම් ℓ සරල රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක (x, y, z) ඛණ්ඩාංක ලියා දක්වන්න.

ත්‍රිමාන අවකාශයෙහි පහත දැක්වෙන ℓ_1 සහ ℓ_2 සරල රේඛා දෙක සලකන්න:

$\ell_1 : (1,1,2)$ දිශා දෛශිකය සහිතව $(0,2,-1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන

$\ell_2 : (1,1,3)$ දිශා දෛශිකය සහිතව $(1,0,-1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන

(අ) පිළිවෙලින් α සහ β පරාමිති ලෙස තෝරා ගනිමින් ℓ_1 සහ ℓ_2 සරල රේඛා දෙකෙහි දෛශික සමීකරණ ලියා දක්වන්න. එනයින් ℓ_1 සහ ℓ_2 හි පරාමිතික කාටීසියානු සමීකරණ ලබා ගන්න.

(ආ) ℓ_1 සහ ℓ_2 එකිනෙක ඡේදනය නොවන බව පෙන්වන්න.

(ඇ) P සහ Q යනු පිළිවෙලින් ℓ_1 සහ ℓ_2 මත පිහිටි ℓ_1 සහ ℓ_2 අතර කෙටිම දුර PQ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙක යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{PQ}$ සොයා $|\overrightarrow{PQ}| =$ ඒකක $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(ඈ) P සහ Q ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

---

2. සුපුරුදු අංකනයෙන්,

(i) $\phi(x, y, z)$ අදිශ ක්ෂේත්‍රයක අනුක්‍ර ϕ (grad ϕ);

(ii) $\underline{F}(x, y, z) = F_1\,\underline{i} + F_2\,\underline{j} + F_3\,\underline{k}$ දෛශික ක්ෂේත්‍රයක අපසා $\underline{F}$ (div $\underline{F}$) සහ බඹුර $\underline{F}$ (curl $\underline{F}$);

අර්ථ දක්වන්න.

(අ) ත්‍රිමාන අවකාශයෙහි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක උෂ්ණත්වය T යන්න $T = xy + yz + zx$ මගින් දෙනු ලැබේ.

(i) (1,2,3) ලක්ෂ්‍යයේදී T හි දිශ්‍ය ව්‍යුත්පන්නය;

(ii) (-3,2,4) දෛශිකයෙහි දිශාවට වූ (i) කොටසෙහි දිශ්‍ය ව්‍යුත්පන්නයේ සංරචකය;

සොයන්න.

සම්බන්ධිතයි.

(ආ) $\underline{F}$ දෛශික ක්ෂේත්‍රයක් $\underline{F} = (3x^2y - z)\,\underline{i} + (xz^3 + y^4)\,\underline{j} - 2x^3z^2\,\underline{k}$ මගින් දී ඇත්නම, (2,-1,0) ලක්ෂ්‍යයේදී grad div $\underline{F}$ සොයන්න.

(ඇ) තරලයක චලිතය

$$\underline{v} = (y\sin z - \sin x)\,\underline{i} + (x\sin z + 2yz)\,\underline{j} + (xy\cos z + y^2)\,\underline{k}$$

ප්‍රවේග ක්ෂේත්‍රය මගින් විස්තර කරනු ලැබේ.

(i) $\underline{v}$ නිර්භ්‍රමණ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\phi(x,y,z)$ ප්‍රවේග විභවය

$$\phi(x,y,z) = xy\sin z + \cos x + y^2 z + C$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි C යනු නියතයක් වේ.

---

3. $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ සහ $r = |\underline{r}|$ යනු O මූලයේ සිට $P \equiv (x,y,z)$ ලක්ෂ්‍යයට දුර යැයි ගනිමු. තවද, සියලුම අංකන වලට සුපුරුදු තේරුම් ඇත.

(i) $\text{grad}\,\frac{1}{r}$ සොයන්න.

(ii)

$$\text{curl}\left(\underline{k} \times \text{grad}\,\frac{1}{r}\right)$$

සහ

$$\text{grad}\left(\underline{k} \cdot \text{grad}\,\frac{1}{r}\right)$$

ගණනය කරන්න. මෙහි $\underline{k}$ යනු Oz දිශාවට වූ ඒකක දෛශිකය වේ.

(iii) එනයින්

$$\text{curl}\left(\underline{k} \times \text{grad}\,\frac{1}{r}\right) + \text{grad}\left(\underline{k} \cdot \text{grad}\,\frac{1}{r}\right) = \underline{0}$$

බව පෙන්වන්න.

---

4. (අ) $\underline{F} = (e^x z - 2xy)\,\underline{i} + (1 - x^2)\,\underline{j} + (e^x + z)\,\underline{k}$ දෛශික ක්ෂේත්‍රය සලකන්න.

(i) $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ රේඛා අනුකලය C පථයෙන් ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න. මෙහි $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ වේ.

(ii) $\underline{F} = \text{grad}\,f$ වන පරිදි f අදිශ ශ්‍රිතයක් සොයන්න.

(iii) එනයින් (0,1,-1) සිට (2,3,0) දක්වා වූ වක්‍රයක් ඔස්සේ $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ රේඛා අනුකලය අගයන්න.

(ආ) තලයක් සඳහා ග්‍රීන් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$$\int_C (xy + y^2)\,dx + x^2\,dy$$

සඳහා ග්‍රීන් ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කරන්න. මෙහි C යනු $y = x$ සහ $y = x^4$ මගින් පර්යන්තගත පෙදෙසෙහි සංවෘත වක්‍රය වේ.

සම්බන්ධිතයි.

5. ගවුස් අපසාරිතා ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$\underline{F} = 4xz\underline{i} - y^2\underline{j} + yz\underline{k}$ දෛශික ක්ෂේත්‍රය සහ S යනු $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$ සහ $z = 1$ තල වලින් පර්යන්තගත ඝනකයෙහි පෘෂ්ඨය බව දී ඇත. ගවුස් අපසාරිතා ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කරන්න.

---

6. ස්ටෝක්ස් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$x = 0, y = 0$ සහ $z = 0$ තල වලින් පර්යන්තගත $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ තලයෙහි S ත්‍රිකෝණාකාර පෘෂ්ඨය පිරිවසා $\underline{F} = z\underline{i} + (2x+z)\underline{j} + x\underline{k}$ දෛශික ක්ෂේත්‍රය සඳහා ස්ටෝක්ස් ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කරන්න. ත්‍රිකෝණාකාර පෘෂ්ඨයෙහි මායිම් රේඛා අනුලයෙහි පථය ලෙස ගන්න.

අවසාන පිටුව.