රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

සාමාන්‍ය විද්‍යා උපාධි

තෙවන ස්ථලය (පළමු සමාසික) පරීක්ෂණය

2017 අගෝස්තු

විෂයය: ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: MAT311β/MPM3113 (සමූහ වාදය)
කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්ණ **04 කට පමණක්** පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. a) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ කුලකය සහ $(x, n) * (y, m) = (x + 2^n y, n + m)$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති $*$ කර්මය සලකන්න; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ සහ $n, m \in \mathbb{Z}$ වේ.
$(A, *)$ සමූහයක් බව සාධනය කරන්න.
$(A, *)$ යන්න ආබෙලියානු සමූහයක් වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

b) $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ සහ $\circ$ යනු S මත සියලු $x, y \in S$ සඳහා $x \circ y = |x - y|$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති ද්විමය කර්මයක් යැයි ගනිමු.
S යන්න $\circ$ කර්මය යටතේ සමූහයක් සාදන්නේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

---

2. a) G සමූහයක, H නොහිස් උප කුලකයක් උප සමූහයක් වීම සඳහා අනිවාර්ය සහ ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාවයක් වන්නේ $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ වීම බව පෙන්වන්න.

b) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc \neq 0 \right\}$
යනු න්‍යාස ගුණනය යටතේ සමූහයක් යැයි ගනිමු.

(i) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ හි ප්‍රතිලෝමය ලියන්න.

(ii) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a = \pm 1,\ b \in \mathbb{Z} \right\}$, G හි උප සමූහයක් බව සාධනය කරන්න.

c) G යනු ආබෙලියානු සමූහයක් යැයි ගනිමු. $H = \{x \in G \mid x = x^{-1}\}$ යනු G හි උප සමූහයක් බව සාධනය කරන්න.

---

3. a) $G = \{1, 3, 7, 9\}$ සහ $a, b \in G$ සඳහා $\otimes_{10}$ කර්මය $a \otimes_{10} b = r,\ 0 \leq r < 10$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත්තේ යැයි ගනිමු; මෙහි r යනු සාමාන්‍ය ගුණනය ab, 10 න් බෙදූවිට ලැබෙන ශේෂයයි.

(i) $(G, \otimes_{10})$ සමූහයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) G හි සෑම අවයවයකම ගණය සොයන්න.

(iii) G චක්‍රීය වේද? (ii) කොටස භාවිතයෙන් ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

b) (i) G චක්‍රීය සමූහයක් ගණය n වූ a අවයවයකින් ජනනය වේ නම්, a^m යන්න G හි ජනකයක් වන්නේ ම.පො.සා.$(m, n) = 1$ නම් සහ නමම පමණක් බව පෙන්වන්න.

සම්බන්ධිතයි.

(ii) 11 මාපාංකානුකූල, ශුන්‍ය නොවන නිඛිල කුලකය, $\mathbb{Z}_{11}^*$ හි අවයව ලියන්න.

(iii) 2 යනු $(\mathbb{Z}_{11}^*, \otimes_{11})$ සමූහයෙහි ජනකයක් බව දී ඇත්නම් $(\mathbb{Z}_{11}^*, \otimes_{11})$ හි සියලුම ජනක සෙවීමට (i) කොටස භාවිතා කරන්න.

---

4. G යනු සමූහයක් සහ H යනු G හි උප සමූහයක් යැයි ගනිමු. Ha සහ Hb යනු H හි G තුල දකුණත් සහකුලක දෙකක් නම්, $Ha \cap Hb = \phi$ හෝ $Ha = Hb$ වන බව පෙන්වන්න.

a) (i) $\rho = (1326)(124)(35)$ සංකරණය තනි චක්‍රයක් හෝ වියුක්ත චක්‍ර වල ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) $o(\rho)$ සොයන්න.

b) $\tau = \alpha^{-1}\beta^2$ ලෙස ගනිමු; මෙහි $\alpha = (123), \beta = (5432)$ වේ.

(i) τ සංකරණය සොයන්න.

(ii) τ ඉරට්ටේ සංකරණයක්ද? ඔත්තේ සංකරණයක් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

c) $H = \{I, (123), (132)\}$ යන්න S_3 හි උප සමූහයක් යැයි ගනිමු; මෙහි $S_3 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ සංකරණ වල සංයුතය යටතේ සමූහයක් වේ. සියලුම වමත් සහ දකුණත් සහකුලක ලැයිස්තුගත කරමින් H යන්න S_3 හි ප්‍රමත වන බව පෙන්වන්න.

---

5. a) f යනු $(\mathbb{Z}, +)$ සිට ගුණිතය යටතේ සමූහයක් වන $G = \{1, -1\}$ ට වූ,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \text{ ඉරට්ටේ විට,} \\ -1 & ; x \text{ ඔත්තේ විට,} \end{cases}$$

ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති අනුරූපනයකි.

$f : \mathbb{Z} \to G$ සරූපතාවයක් බව පෙන්වන්න.

$f : \mathbb{Z} \to G$ සමරූපතාවයක් වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

b) G, G' යනු සමූහ දෙකක් සහ $f : G \to G'$ සරූපතාවයක් යැයි ගනිමු.

(i) f හි මදය (Ker f) අර්ථ දක්වන්න.

(ii) f එකට-එක වන්නේ Ker $f = \{e\}$ නම් සහ නම්ම පමණක් බව සාධනය කරන්න; මෙහි e යනු G හි සර්වසාම්‍ය අවයවය වේ.

(iii) $R = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{C} \right\}$ යනු න්‍යාස ආකලනය යටතේ සමූහයක් සහ $S = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{C}\}$ යනු ආකලනය යටතේ සමූහයක් ලෙස ගනිමු.

$\theta : R \to S$,

$$\theta\left[\begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix}\right] = (x, y)$$

ලෙස අර්ථ දක්වමු. θ සරූපතාවයක් බව පෙන්වන්න.

Ker θ සොයන්න.

සම්බන්ධිතයි.

6. a) $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ සඳහා $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi_{ab}(x) = ax + b$ ලෙස අර්ථ දක්වන්න.
$G = \{\phi_{ab} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ සහ $N = \{\phi_{ab} \in G \mid a = 1, b \in \mathbb{R}\}$ ලෙස ගනිමු.
N යන්න G හි ප්‍රමත උප සමූහයක් බව සාධනය කරන්න.

b) $f : G \to G'$ යනු මතට වූ සරූපනාවයක් සහ $K = \text{Ker} f$ ලෙස ගනිමු.
G' හි H' උප සමූහයක් සඳහා $H = \{x \in G \mid f(x) \in H'\}$ ලෙස අර්ථ දක්වන්න.

(i) H යන්න G හි උප සමූහයක් බව;

(ii) $K \subseteq H$ බව;

(iii) H' , G' හි ප්‍රමත නම්, H, G හි ප්‍රමත වන බව

පෙන්වන්න.

අවසාන පිටුව.