රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය

විද්‍යාවේදී(සාමාන්‍ය) උපාධිය

දෙවන ස්ථලය (දෙවන සමාසික) පරීක්ෂණය - ජනවාරි- 2018

විෂයය: ගණිතය
පාඨමාලා ඒකකය: MAT225β / MMS2213 (ගණිතමය සංඛ්‍යානය-I)
කාලය: පැය දෙකයි (02)

ප්‍රශ්න 04 කට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. Y_1 සහ Y_2 විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයන්හි බද්ධ සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය පහත ආකාරයෙන් දෙනු ලැබේ.

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = k(y_1 + y_2^2), \quad y_1 = -1, 0, 1 \quad y_2 = -1, 2, 3$$

k යනු නියතයකි.

a) k හි අගය සොයන්න.

b) $F(0,2)$ සොයන්න, මෙහි $F(y_1, y_2)$ යනු Y_1 සහ Y_2 සසම්භාවී විචල්‍යයන්ගේ බද්ධ ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය වේ.

c) $P(Y_2 > 2Y_1)$ සොයන්න.

d) Y_1 සහ Y_2 හි ආන්තික සම්භාවිතා ව්‍යාප්තීන් සොයන්න.

e) $E(Y_1Y_2), E(Y_1)$ සහ $E(Y_2)$ ගණනය කරන්න.

f) $Cov(Y_1, Y_2)$ සොයන්න.

g) Y_1 සහ Y_2 ස්වායත්තද? ඔබේ පිළිතුර සාධාරණීකරණය කරන්න.

---

2. එක්තරා ඉන්ධන අලෙවි සැලක සතිය ආරම්භයේ ටැංකියේ ගබඩා කර ඇති ඉන්ධන ප්‍රමාණය ටැංකියෙන් කොපමණ කොටසක්ද යන්න X මඟින් දක්වන අතර, සතිය තුළදී විකුණන ලද ඉන්ධන ප්‍රමාණය ටැංකියෙන් කොපමණ කොටසක්ද යන්න Y මඟින් දැක්වේ. මෙම සසම්භාවී විචල්‍යයන් දෙකෙහි බද්ධ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6(1-y) & ; 0 \leq Y \leq X \leq 1 \\ 0 & ; \text{අනෙක් විට} \end{cases}$$

මඟින් දෙනු ලැබේ.

(a) $P(Y \leq 1/2, X \leq 3/4)$ සොයන්න.

(b) X හි ආන්තික සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයන්න.

(c) $X = x$ දී ඇති විට Y හි අසම්භාවී සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය සොයන්න.

(d) සතිය තුළදී ටැංකියේ 3/4 ක් විකිණී ඇති විට, සතිය ආරම්භයේ ටැංකියේ 1/2 කට වඩා අඩුවෙන් තිබීමෙ අසම්භාවී සම්භාවිතාව සොයන්න.

සම්බන්ධිතයි.

(e) සතිය තුලදී ටැංකියේ 3/4 ක් විකිණී ඇති විට,සතිය ආරම්භයේ ටැංකියේ ඇති ප්‍රමාණයේ අසම්භාවී අපේක්ෂාව සොයන්න.

---

3. Y_1 සහ Y_2 සසම්භාවී විචල්‍යයන් දෙක ස්වායත්ත වන අතර ඒවායේ ආන්තික ඝනත්ව ශ්‍රිතය පහත ආකාර වේ.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & ; y > 1 \\ 0 & ; \text{අනෙක් විට} \end{cases}$$

(අ) Y_1 සහ Y_2 සසම්භාවී විචල්‍යයන් ගේ බද්ධ සම්භාවී ඝනත්ව ශ්‍රිතය සොයන්න.

(ආ) $U_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$ සහ $U_2 = Y_1 + Y_2$ ලෙස දී ඇත.

(i) U_1 සහ U_2 යන නව සසම්භාවී විචල්‍යයන්හි බද්ධ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය;

$$f_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = \begin{cases} \frac{1}{u_1^2(1-u_1)^2u_2^3} & ; 1/u_1 < u_2, \quad 0 < u_1 < 1/2 \\ & 1/(1-u_1) < u_2, \quad 1/2 \le u_1 < 1 \\ 0 & : \text{අනෙක් විට} \end{cases}$$

බව පෙන්වන්න.

(ii) එනයින්, U_1 හි ආන්තික සසම්භාවී ඝනත්ව ශ්‍රිතය සොයන්න.

---

4. a) $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ යනු ස්වායත්ත හා සර්වසම ලෙස ව්‍යාප්ත වූ n සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයන් වන අතර, පොදු සමුච්චිත ව්‍යාප්ත ශ්‍රිතය $F_Y(y)$ හා පොදු සසම්භාවී ඝනත්ව ශ්‍රිතය $f_Y(y)$ වේ .

$Y_{(1)} = min(Y_1, Y_2 ... Y_n)$ හා $Y_{(n)} = max(Y_1, Y_2, ... Y_n)$ යනු $Y_1, Y_2 ... Y_n$ සසම්භාවී විචල්‍යයන්හි පිළිවෙලින් අවමය හා උපරිමය වේ .

(i) $Y_{(1)}$ හි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය $n[1 - F_Y(y)]^{n-1} f_Y(y)$ බව පෙන්වන්න..

(ii) $Y_{(n)}$ හි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය $n[F_Y(y)]^{n-1} f_Y(y)$ බව පෙන්වන්න.

b) පරාමිතිය β වන ඝාතීය සංගහනයකින් ගත්, තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියක් සඳහා සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය .

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} & ; y > 0, \quad \beta > 0 \\ 0 & ; \text{අනෙක් විට} \end{cases}$$

වේ නම්, $Y_{(1)}$ සඳහා පරාමිතිය β/n වන ඝාතීය ව්‍යාප්තියක් ඇති බව පෙන්වන්න.

c) Y_1 සහ Y_2 යනු සමාන අරමුදල් සහිත වෙළඳ ව්‍යාපාරයක එක් කොටසක ආරම්භක මුදල් වේ. Y_1 සහ Y_2 යන ස්වායත්ත සසම්භාවී විචල්‍යයන් දෙකෙහි බද්ධ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-(y-4)/2} & ; y \ge 4 \\ 0 & ; \text{අනෙක් විට} \end{cases}$$

සම්බන්ධිතයි.

මගින් දැක්වෙ.
දී ඇති උදැසනක, ආයෝජකයා විසින් , අඩුම මිළ සහිත කොටස් මිළදී ගැනීමට තීරණය කරයි.

(i) ආයෝජකයා විසින් කොටසක් සඳහා ගෙවිය යුතු මුදලෙහි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය සොයන්න.

(ii) ආයෝජකයා විසින් ගෙවිය යුතු මුදලෙහි අපේක්ෂාව සොයන්න.

---

5. (a) $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ යනු මධ්‍යන්‍යය μ හා විචලතාව σ^2 සහිත ප්‍රමථ සංගහනයකින් ගත් තරම n වූ සසම්භාවී නියැදියකි.

(i) නියැදි මධ්‍යන්‍යය $\bar{Y}$ සහ නියැදි විචලතාවය S^2 අර්ථ දක්වන්න.
$E[\bar{Y}] = \mu$ හා $Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) පහත දැක්වෙන සසම්භාවී විචල්‍යයන්හි ව්‍යාප්තීන් ලියා දක්වන්න.

$$\sqrt{n}\Big(\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma}\Big), \sqrt{n}\Big(\frac{\bar{Y}-\mu}{S}\Big), \quad \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{Y_i-\mu}{\sigma}\Big)^2, \quad \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{Y_i-\bar{Y}}{\sigma}\Big)^2$$

(iii) $\sigma^2 = 16$ සහ $n = 9$ නම්,

(1) $P(|\bar{Y}-\mu| \leq 2)$ සොයන්න.

(2) $P(a_1 < S^2 < a_2) = 0.9$ වන පරිදි a_1 සහ a_2 සොයන්න.

(b) ව්‍යාපාරික ආයතනයක් රසායන ද්‍රව්‍ය වර්ග දෙකක් මිළදී ගනියි. A වර්ගයේ ලීටරයක මිළ Rs 30.00 ක් හා B වර්ගයේ ලීටරයක මිළ Rs 50.00 ක් වෙ. Y_1 සහ Y_2 යනු පිළිවෙලින් A හා B වර්ග දෙකෙන් සතියක් තුළදී මිළදී ගත් ලීටර් ප්‍රමාණ වෙ . (Y_1 සහ Y_2 ස්වායත්ත වේ යැයි උපකල්පනය කරන්න.)

(i) සතියක් තුළදී රසායන ද්‍රව්‍ය වර්ග දෙකට වියදම් කළ මුලු මුදල සොයන්න.

(ii) $E(Y_1) = 40$, $V(Y_1) = 4$ සහ $E(Y_2) = 65$, $V(Y_2) = 8$ ලෙස දී ඇති විට, මුලු මුදලෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

---

6. a) මධ්‍ය සීමා ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

පරිපථයක් සඳහා භාවිතා කරන ප්‍රතිරෝධක වල මධ්‍යන්‍යය ප්‍රතිරෝධය $200ohms$ හා සම්මත අපගමනය $10ohms$ වෙ . පරිපථයේ භාවිතය සඳහා ප්‍රතිරෝධක 35 කින් යුතු සසම්භාවී නියැදියක් තෝරා ගතහොත්;

(i) ප්‍රතිරෝධක වල මධ්‍යන්‍යය ප්‍රතිරෝධය $199ohms$ සහ $202ohms$ අතර පැවතීමෙ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) ප්‍රතිරෝධක 35 හි මුලු ප්‍රතිරෝධය $6900ohms$ කට වඩා වැඩි නොවීමෙ සම්භාවිතාව සොයන්න.

b) පරිගණක තැටි (ඩිස්ක්) වල තත්වය missing pulse ප්‍රමාණය මගින් තීරණය කරනු ලබයි. X වර්ගයේ තැටියක missing pulse නොතිබීම 80% වෙ.X වර්ගයේ තැටි 100 කින් යුතු සසම්භාවී නියැදියක් පරික්ෂා කිරීම සඳහා තෝරා ගතහොත්; missing pulses අඩුම තරමින් 15 ක් වත් තිබීමෙ සම්භාවිතාව සොයන්න ?

අවසාන පිටුව.