රුහුණු විශ්වවිද්‍යාලය
විද්‍යා පීඨය
විද්‍යා (සාමාන්‍ය) උපාධි
පළමු ස්ථලය (දෙවන සාමාසික) පරීක්ෂණය - 2018, ජනවාරි

විෂයය: ගණිතය

පාඨමාලා ඒකකය: MAT 121β/ MPM1213– වීජ ගණිතය

උපදෙස්:

- ප්‍රශ්න හතරකට *(04)* පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- කාලය: *පැය දෙකයි (02).*

❖ මෙහි $\Re$ මගින් තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය ද, Z^+ මගින් ධන පූර්ණ සංඛ්‍යා කුලකය ද දැක්වේ.

1. (a) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ යනු Ω නිශ්ශූන්‍ය කුලකයක, උප කුලකවල අනන්ත අනුක්‍රමයක්, සියලු $n \in Z^+$ සඳහා $A_n \subseteq A_{n+1}$ වන පරිදි වූ යැයි ගනිමු. $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ යනු $B_1 = A_1$, හා සියලු $n \in Z^+ \setminus \{1\}$ සඳහා $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ ලෙස අර්ථ දැක්වූ උප කුලකයන්හි අනුක්‍රමයක් ලෙස ගනිමු. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ** සියලු $n \in Z^+$ සඳහා $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ බව පෙන්වන්න.

[25 points]

ඒ නයින්, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ බව පෙන්වන්න. [15 points]

(b) R යන්න $\Re \times \Re$ මත, $a - b \in Z$ ම නම් පමණක් $(a,b) \in R$ ලෙස අර්ථ දැක්වූ සම්බන්ධයක් යැයි ගනිමු. R තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් බව පෙන්වන්න. [15 points]

$\{ x \in \Re \mid (x, 1) \in R \}$ කුලකය සොයන්න. [10 points]

(c) (i) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ යැයි ගනිමු. f හි වසම හා පරාසය සොයන්න. [5+10 points]

(ii) $g : [0, \infty] \to \Re$ යන්න $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ ලෙස දෙනු ලැබේ යැයි ගනිමු.

g^{-1} සොයා, සියලු $x \in (0, 1]$ සඳහා $(g \circ g^{-1})(x) = (g^{-1} \circ g)(x) = x$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

[10+10 points]

2. (a) $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ යැයි හා $\det(A) = \alpha$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha \in \Re \setminus \{0\}$ වේ.

නිශ්චායකයන්ගේ ගුණ යොදා ගැනීමෙන්, පහත නිශ්චායක එක එකෙහි අගයන් α ඇසුරෙන් සොයන්න.

(i) $\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix}$,

(ii) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

(iii) $\det\left((2A)^{-1}\right)$,

(iv) $\det(AA')$.

[40 points]

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

A^{-1} සොයා, ඒ නයින් පහත සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$\begin{aligned} x \quad + y \quad + 2z &= 9 \\ 2x \quad + 4y \quad - 3z &= 1 \\ 3x \quad + 6y \quad + -5z &= 0. \end{aligned}$$

[25+10 points]

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2\alpha & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3(\alpha-1) & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha \in \Re$. වේ.

නිශ්චායකයන්ගේ ගුණ යොදා ගැනීමෙන්, α ඇසුරෙන් A හි නිශ්චායකය සොයන්න. [20 points]

α හි කුමන අගයයන් සඳහා පහත සමජාතීය පද්ධතියට විසඳුම් අනන්ත සංඛ්‍යාවක් තිබේද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$$\begin{aligned} p \qquad\qquad\qquad\qquad + 3s &= 0 \\ 2p + 2\alpha q \qquad\qquad\quad + 6s &= 0 \\ 6q + 3(\alpha-1)r \qquad\quad &= 0 \\ p + 3q \qquad + r \qquad + 7s &= 0 \end{aligned}$$

[05 points]

cts...

3. (a) $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ යැයි හා $p(x)$ හි මූල α, β හා γ යැයි ගනිමු.

Vieta's සමීකරණ ලියා දක්වන්න. [10 points]

$\alpha = \beta$ වේ නම්, $p(x)$ හි සියලුම මූල සොයන්න. [20 points]

(b) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ යන බහුපද සමීකරණයේ මූල

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ යැයි ගනිමු. තවද, $r \in Z^+$ සඳහා $P_r = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\ r}$ යැයි ගනිමු.

$P_1 = -6,\ P_2 = 32,$ හා $P_3 = -102.$ වූ ද, මාත්‍රය 4 වූ ද

$p(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + 17$ බහුපදය සොයන්න. [30 points]

$-4 + i$ යන්න $p(x)$ හි මූලයක් බව පෙන්වන්න. [10points]

$p(x)$ හි අනෙකුත් සියලුම මූල සොයන්න. [10points]

P_4 සොයා $(4+i)^4 + (4-i)^4 = 322$ බව අපෝහනය කරන්න. [10+10 points]

4. (a) පරිමේය මූල පරීක්ෂාව ප්‍රකාශ කරන්න. [10 points]

$p(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8$ යැයි ගනිමු. $p(x)$ හි සියලුම මූල සොයන්න. [10 points]

(b) 1 හි පස්වන මූලයන් ලියා දක්වන්න. [10 points]

(i) $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$ බව හා [15 points]

(ii) $t^2 + t - 1 = 0$ හි මූල $a = \omega + \omega^4$ හා $b = \omega^2 + \omega^3$

බව පෙන්වන්න; මෙහි $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ වේ. [20points]

ඒ නයින් ab හි අගය සොයන්න. [05 points]

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = -1$$ බව අපෝහනය කරන්න. [10 points]

(c) $z = -1 + i$ හි පස්වන මූලයන් සොයන්න. [10 points

5. (a) $(G, \cdot)$ යන්න සමූහයක් යැයි ගනිමු; මෙහි G යන්න නිශ්ශුන්‍ය කුලකයක් හා $\cdot$ යන්න G මත අර්ථ දැක්වූ කර්මයක් වේ.

(i) $(G, \cdot)$ මගින් තෘප්ත කරනු ලබන සමූහ ප්‍රත්‍යක්ෂ ලියා දක්වන්න. [20 points]

(ii) සියලු $a, b \in G$ සඳහා, $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ බව සාධනය කරන්න [10 points]

(b) එකෙහි පස්වන මූල කුලකය G යැයි ගනිමු; මෙහි $n \in Z^{+}$ වේ. සංකීර්ණ

සංඛ්‍යාවල සාමාන්‍ය ගුණිතය යටතේ G යන්න සමූහයක් වන බව පෙන්වන්න. [40 points]

G ආබේලියන් වේද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. [10 points]

දැන්, $n = 4$ යැයි ගනිමු. G හි අවයව ලියා දක්වා, ගුණන වගුව දෙන්න. [10+10 points]

6. R හා S යනු න්‍යාදේශ වලයයන් යැයි ගනිමු. $R \oplus S$ මගින් දැක්වූ R හා S හි සරල එකතුව, $r \in R$ හා $s \in S$ වන පරිදි වූ (r, s) පටිපාටිගත යුගල කුලකය යැයි ගනිමු. $R \oplus S$ මත $+$ හා $\cdot$ පහත පරිදි අර්ථ දක්වමු; සියලු $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \oplus S$ සඳහා

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2,\ s_1 + s_2) \text{ හා}$$

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 \cdot r_2,\ s_1 \cdot s_2).$$

$(R \oplus S, +, \cdot)$ න්‍යාදේශ වලයයක් බව පෙන්වන්න. [70 points]

$Z_2 \oplus Z_2$ හි සියලුම අවයව ලියා දක්වා $Z_2 \ominus Z_2$ සඳහා ආකලන හා ගුණන වගු දෙන්න.

[10+20 points]